

50 lat
Komitetu Mechaniki PAN
14 kwietnia 2010

Optymalizacja i Sterowanie

Tadeusz Burczyński

Katedra Wytrzymałości Materiałów
i Metod Komputerowych Mechaniki
Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

Instytut Informatyki
Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki
Politechnika Krakowska

Klasyfikacja zadań mechaniki

- **Zadanie bezpośrednie (analiza)**
- **Zadania odwrotne:**
 - Optymalizacja
 - Identyfikacja
 - Sterowanie

Optymalizacja

Zadanie optymalizacji

Zadanie optymalizacji można sformułować następująco – dana jest metryczna przestrzeń poszukiwań $\Omega=(U, |\cdot|)$, gdzie U jest zbiorem wartości, $|\cdot|$ metryką oraz podzbiór $D \subseteq U$.

Dana jest także **funkcja celu** $f(x): U \rightarrow \mathbb{R}$

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu takiego $x^* \in D$, że:

$$x^* = \arg \min_{x \in D} f(x)$$



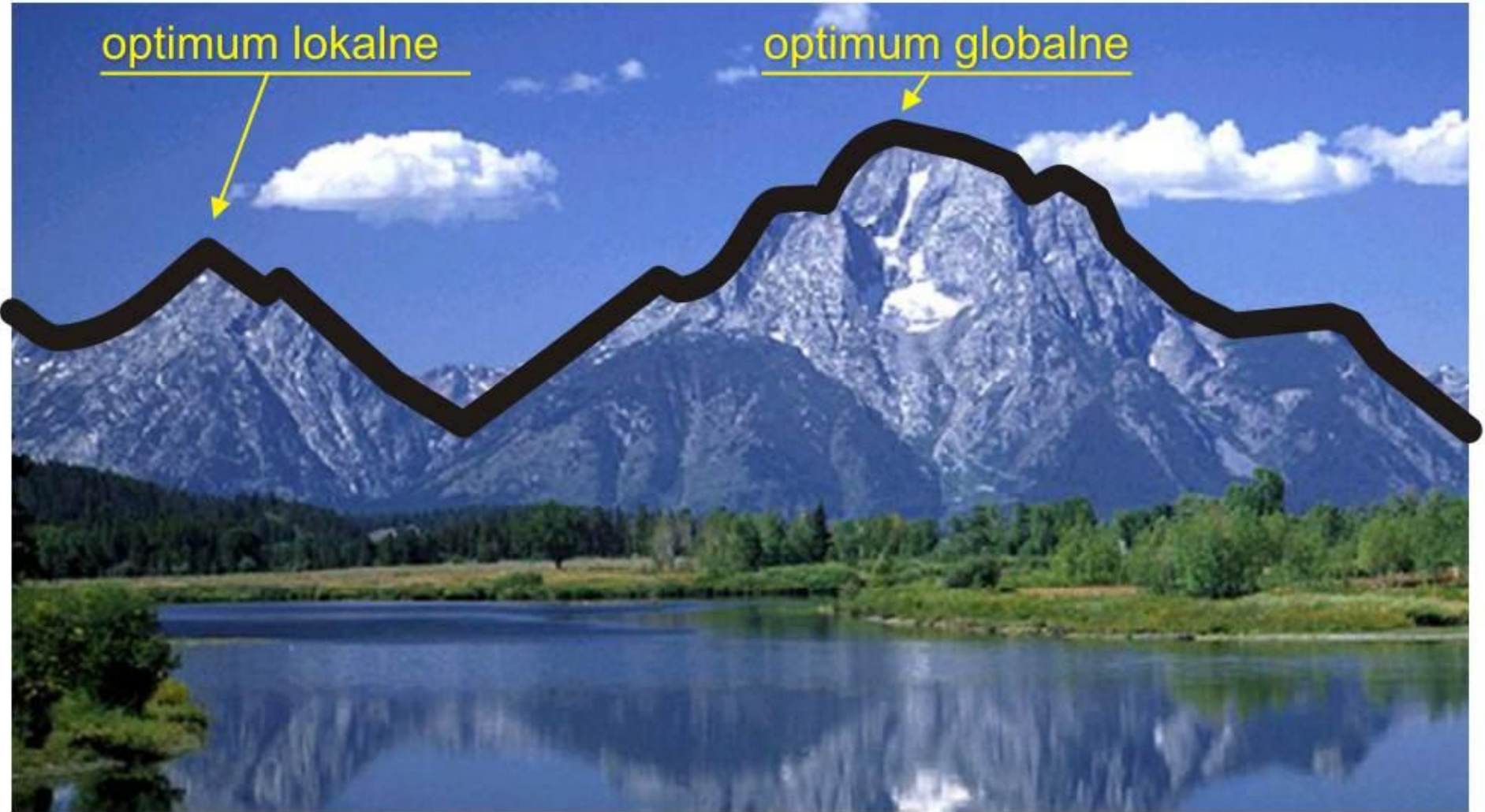


optimum lokalne



optimum lokalne

optimum globalne



Rodzaje zadań (1)

W zależności od przestrzeni przeszukiwań, mówimy o sześciu rodzajach optymalizacji:

1. Optymalizacja parametryczna – zakłada się, że punkt $x \in U$ jest wektorem zmiennych niezależnych, z których każda przyjmuje pewną wartość;

2. Optymalizacja ciągła – charakteryzuje się tym, że przestrzeń przeszukiwań jest iloczynem kartezjańskim zbioru liczb rzeczywistych $U = \mathbb{R}^n$. Rozróżniamy tutaj **zadania wypukłe i optymalizacji globalnej**;

3. Optymalizacja dyskretna – mówimy o niej, gdy wartości zmiennych niezależnych x_i należą do zbioru dyskretnego $U = \mathbb{Z}^n$;

Rodzaje zadań (2)

4. Optymalizacja kombinatoryczna – każda ze zmiennych niezależnych przyjmuje wartość logiczną – **prawda** albo **fałsz**, czyli **$U=Zn^2$** . Są też przypadki **mieszane** – część zmiennych niezależnych przyjmuje wartości ze zbioru liczb rzeczywistych, część zaś całkowitych;

5. Optymalizacja bez ograniczeń – gdy **zbiór dopuszczalny D** może być tożsamy z **przestrzenią przeszukiwań U**;

6. Optymalizacja z ograniczeniami – gdy **zbiór dopuszczalny D** nie może być tożsamy z **przestrzenią przeszukiwań U**.

Sformułowanie zagadnienia optymalizacji w mechanice

$$\min_{\mathbf{x}} J_0$$

J_0 – funkcja celu opisana

gdzie

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

- wektor zmiennych decyzyjnych

x_i – zmienne decyzyjne opisujące parametry geometryczne lub materiałowe

ograniczenia:

$$J_\alpha \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$J_\alpha = J_\alpha(u, \varepsilon, \sigma, T, q, t), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m$$

Optymalizacja wielokryterialna

Znajdź wektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Warunki ograniczające

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

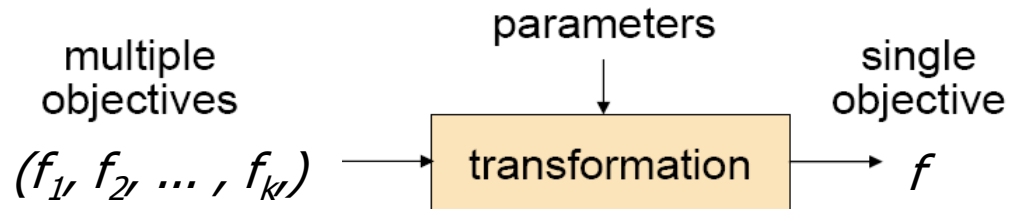
$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Który minimalizuje funkcję wektorową składającą się z k funkcji celu

$$f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^T$$

Metoda współczynników wagowych

$$f(x) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x)$$



gdzie:

k – liczba funkcji celu;

x – poszukiwany wektor;

w_i – współczynniki wagowe $w_i \in [0, 1]$ $\sum_{i=1}^k w_i = 1$

Jak wybrać wagi?

Koncepcja frontu Pareto

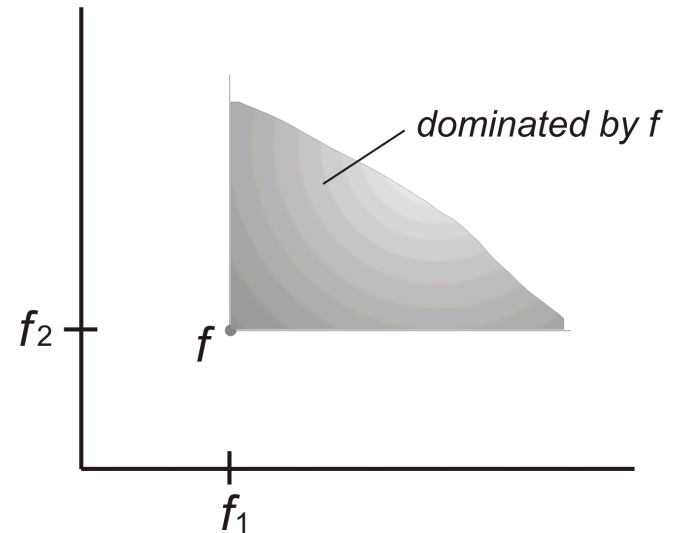
Dla zagadnienia **minimalizacji zbior** k

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}));$$

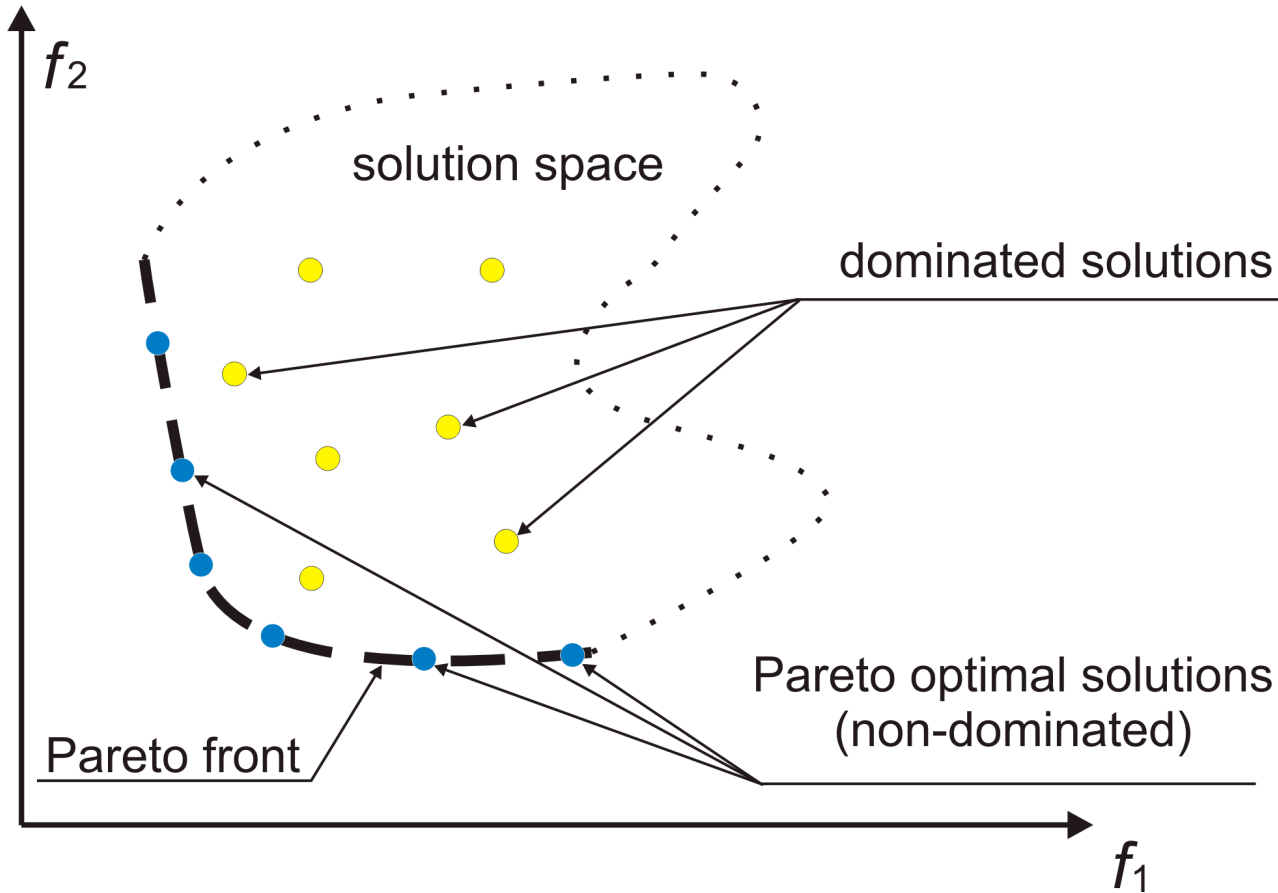
rozwiązanie \mathbf{x} jest zdominowane, jeśli gorsze od \mathbf{x} dla każdej funkcji celu f_i :

$$f_i(\mathbf{y}) \leq f_i(\mathbf{x}) \quad (i=1, \dots, k)$$

w przeciwnym razie \mathbf{x} jest niezdominowanym rozwiązaniem

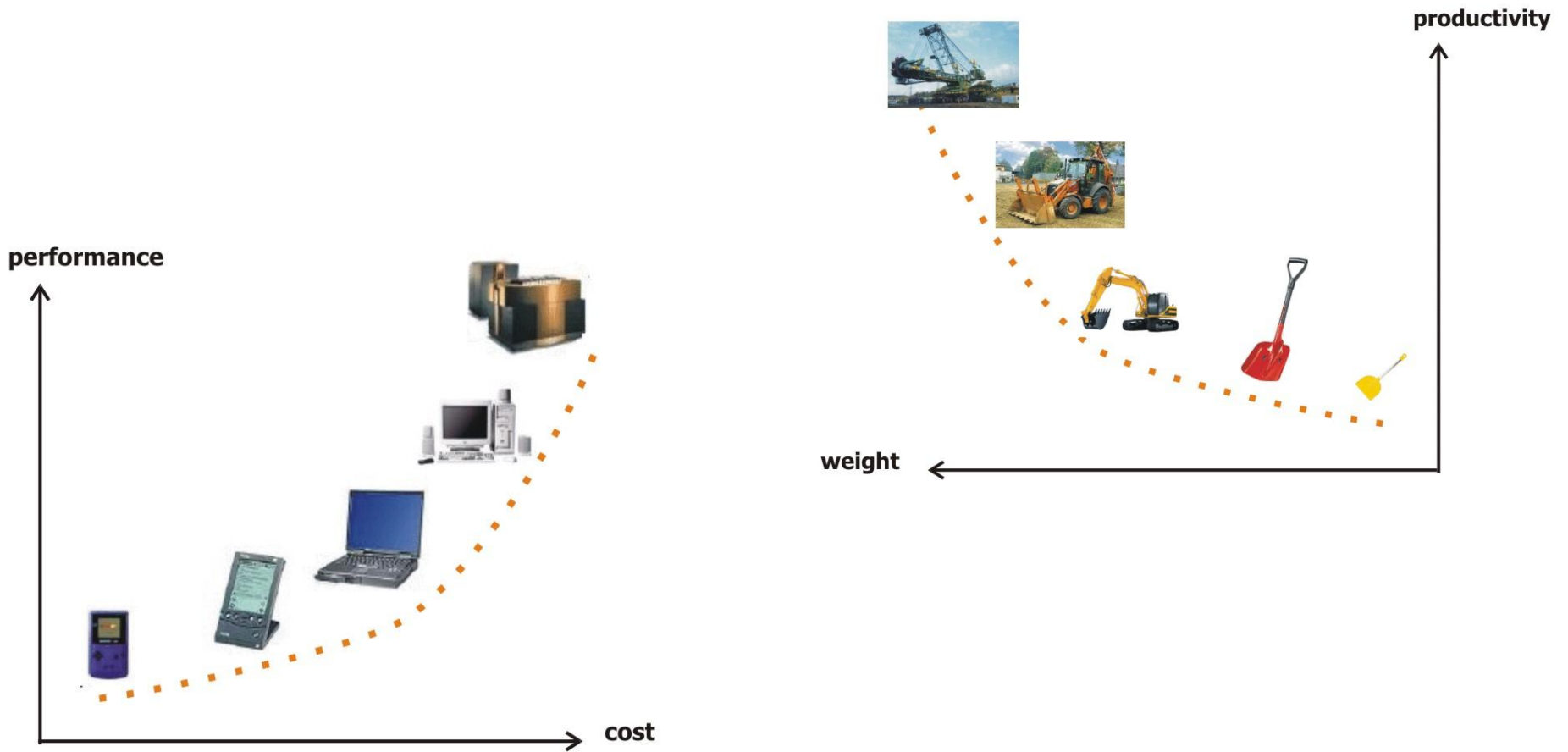


Koncepcja frontu Pareto



Przykład dwóch kryteriów

Optymalizacja wielokryterialna



Optymalizacja w mechanice

- Podział zadań optymalizacji:
 - Optymalizacja wymiarów poprzecznych
 - Optymalizacja materiału
 - Optymalizacja kształtu
 - Optymalizacja topologiczna

Kryteria optymalizacji

- Kryteria naprężeniowe (wytrzymałościowe)
- Kryteria sztywnościowe lub podatnościowe (globalne)
- Kryteria sztywnościowe lokalne (zależne od przemieszczeń)
- Kryteria częstotliwościowe
- Kryteria dynamiczne
- Kryteria trwałościowe i niezawodnościowe

IDENTYFIKACJA

zajmuje się

określeniem parametrów modelu

układu mechanicznych

w których nieznane są:

- **geometria układu**
- **liczba, rodzaj, kształt i położenie defektów**
- **własności materiałowe**

na podstawie informacji w postaci odpowiedzi

układu na dane wzbudzenie

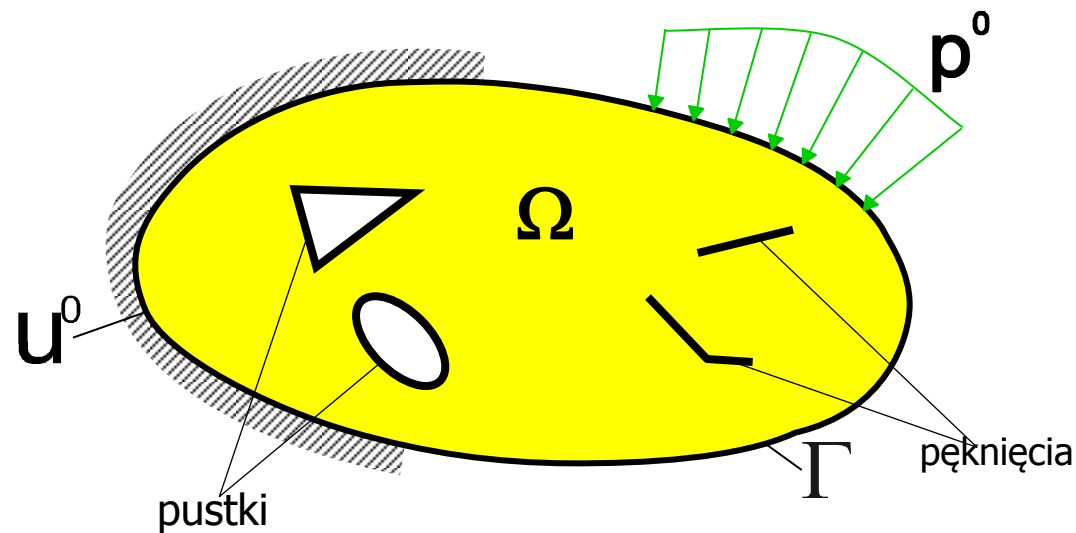
ZAGADNIENIA IDENTYFIKACJI

są matematycznie

źle postawione (ill posed)

- nowe metody obliczeniowe,
- wprowadzenie nowych funkcjonałów jakości,
- nowe techniki regularyzacyjne,
- nowe procedury pomiarowe.

Sformułowanie zagadnienia identyfikacji



Należy znaleźć liczbę, rodzaj, kształt oraz położenie defektów

Dla zagadnień własnych

$$\min_{\underline{x}} J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\hat{\omega}_i - \omega_i \right]^2$$

Identyfikacja nieznanych
defektów

Dla zagadnień statycznych

$$\min_{\underline{x}} J = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\hat{u}(y) - u(y) \right]^2 d\Gamma$$

Dla zagadnień dynamicznych

$$\min_{\underline{x}} J = \frac{1}{2} \int_T \int_{\Gamma} \left[\hat{u}(y,t) - u(y,t) \right]^2 dt d\Gamma$$

Dla zagadnień termo-mechanicznych

$$\min_{\underline{x}} J = \alpha \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\hat{u}(y) - u(y) \right]^2 d\Gamma + \beta \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[\hat{T}(y) - T(y) \right]^2 d\Gamma$$

Wektor zmiennych decyzyjnych

$$\mathbf{X} = \langle X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N \rangle$$

$$X_{iL} \leq X_i \leq X_{iR}$$

$$X_i \in R$$

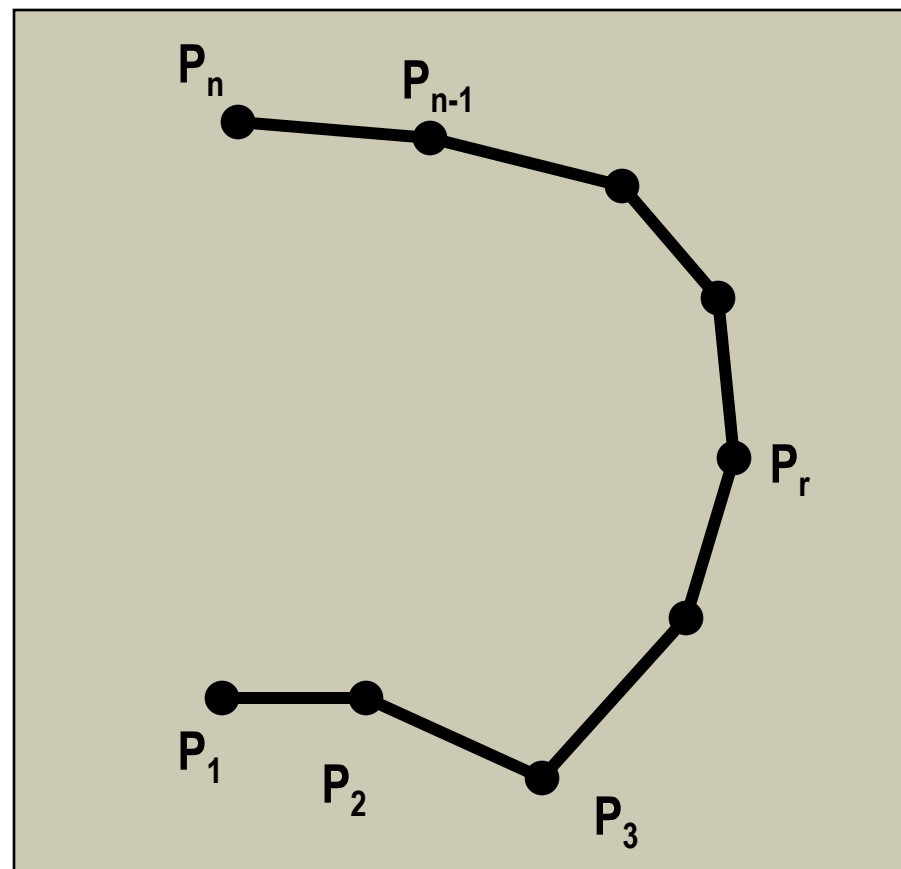
gdzie: x_i – zmienna decyzyjna reprezentująca:

- geometrię defektu
- liczbę defektów
- parametry materiałowe

Parametryzacja

- kształt brzegu

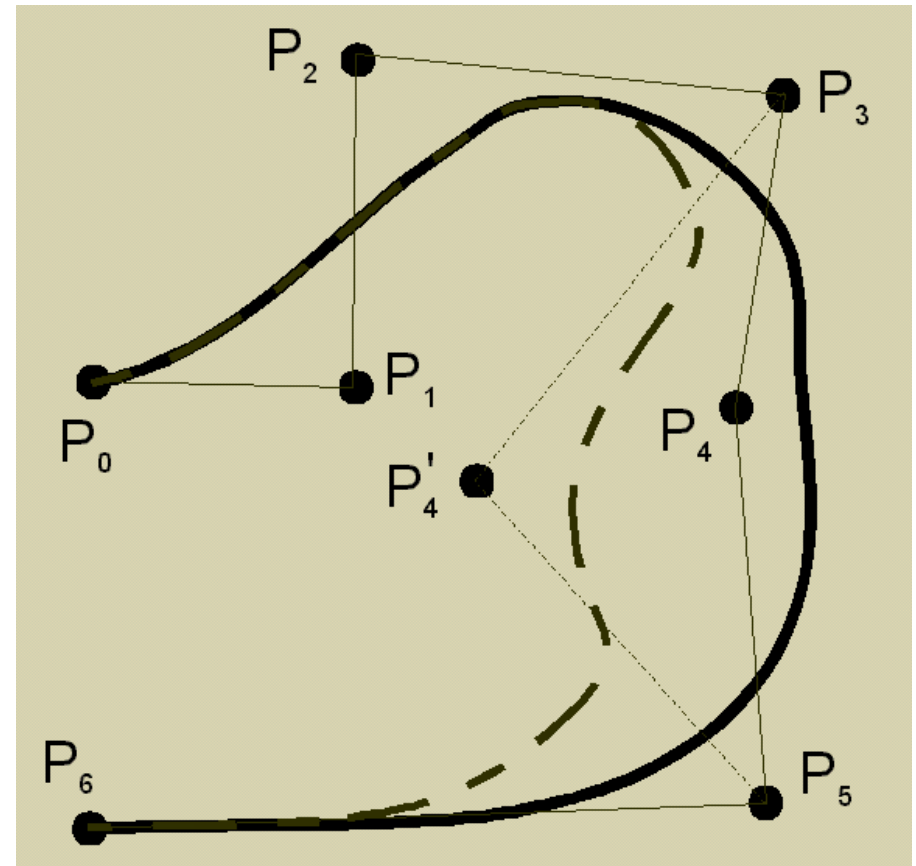
współrzędne punktów brzegowych



$$\underline{x} = \langle P_{1,x}, P_{1,y}, P_{2,x}, P_{2,y}, \dots, P_{r,x}, P_{r,y}, \dots, P_{n,x}, P_{n,y} \rangle$$

- kształt brzegu

współrzędne punktów kontrolnych krzywej NURBS



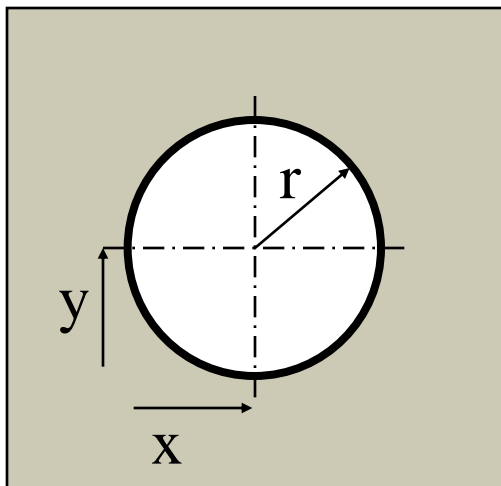
$$\underline{x} = \langle P_{1,x}, P_{1,y}, P_{2,x}, P_{2,y}, \dots, P_{r,x}, P_{r,y}, \dots, P_{n,x}, P_{n,y} \rangle$$

- kształt pustek lub wtrąceń

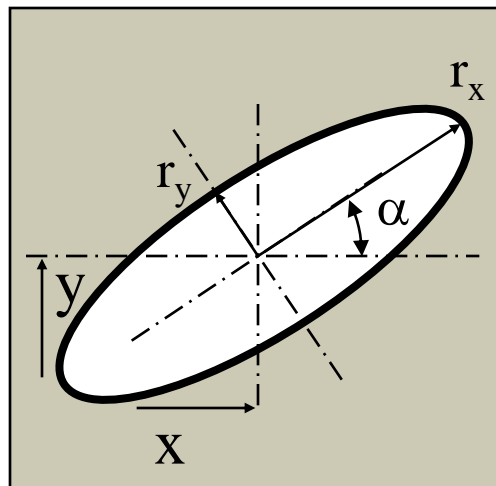
coordinates of center and radius value (circle)

coordinates of center, radius values and angle of rotate (ellipse)

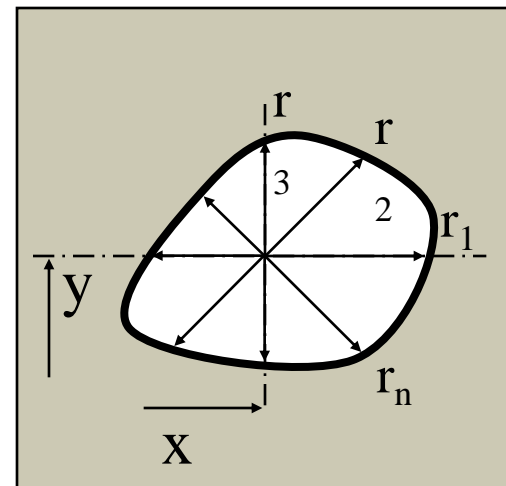
coordinates of center, and n radius values (NURBS)



$$\underline{x} = \langle x_c, y_c, r \rangle$$



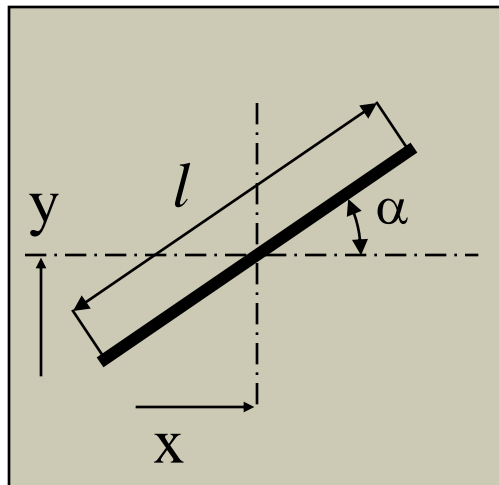
$$\underline{x} = \langle x_c, y_c, r_x, r_y, \alpha \rangle$$



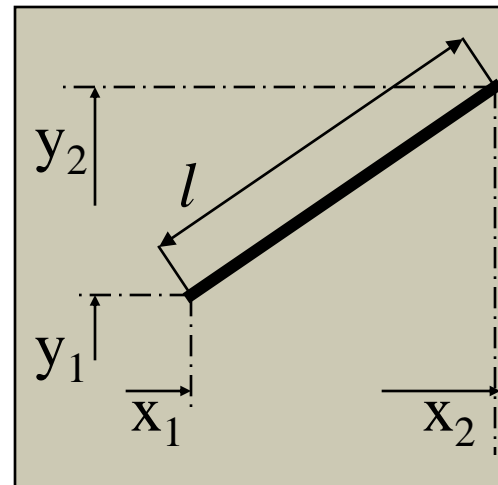
$$\underline{x} = \langle x_c, y_c, r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$$

- kształt pęknięcia

coordinates of center, length and angle of rotate

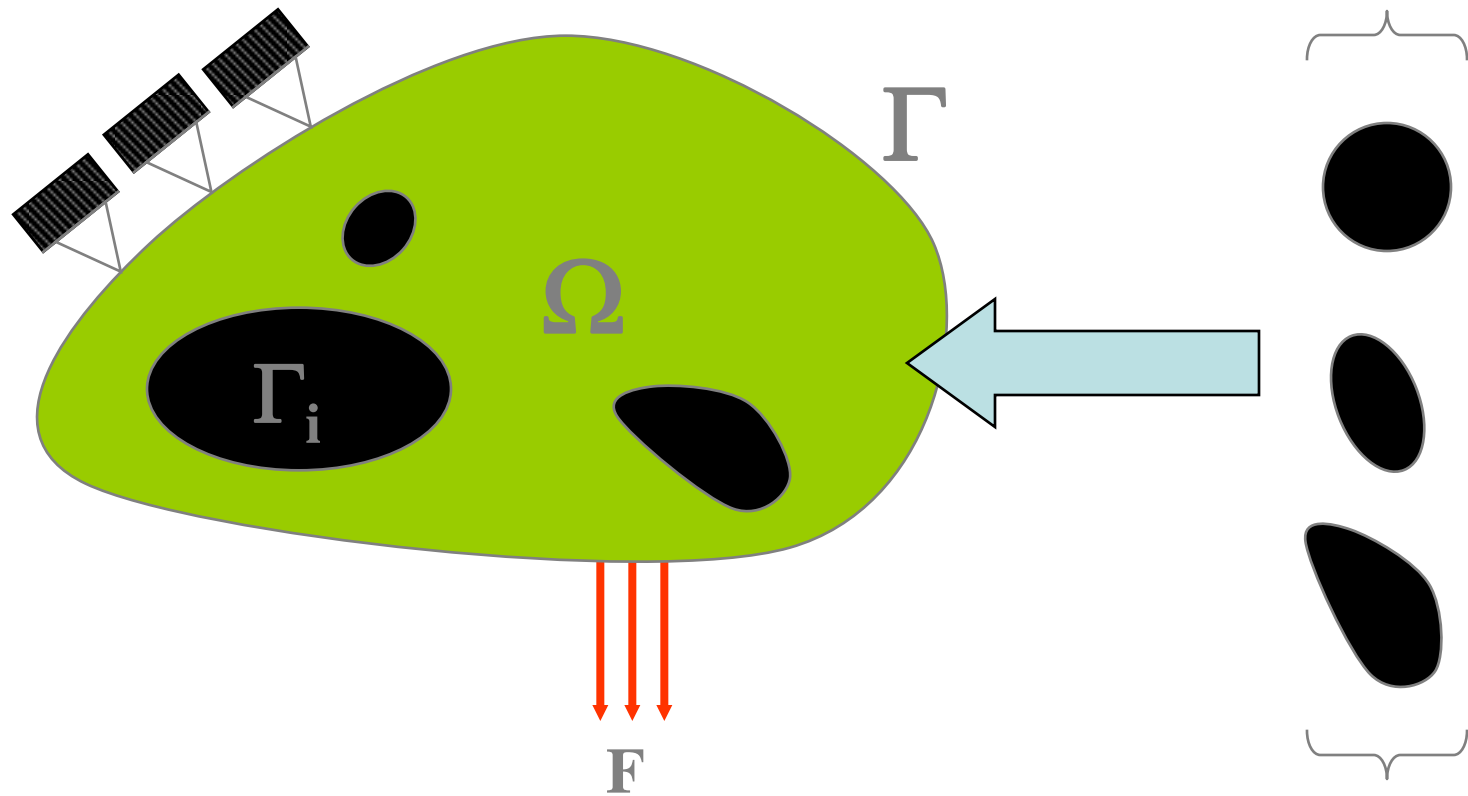


$$\underline{x} = \langle x_c, y_c, l, \alpha \rangle$$



$$\underline{x} = \langle x_1, y_1, x_2, y_2 \rangle$$

Optymalizacja topologiczna



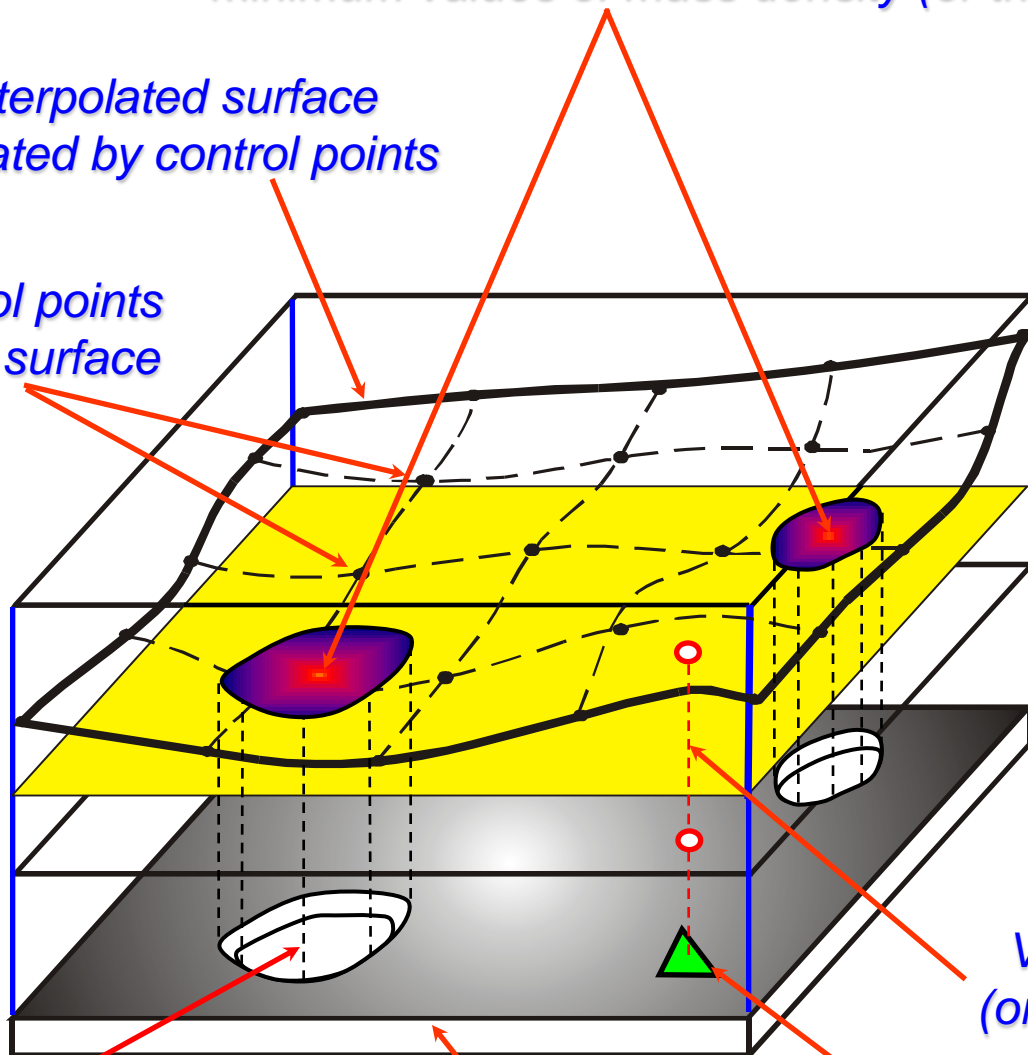
Areas in which the interpolated surface is below of the surface for minimum values of mass density (or thickness)

The interpolated surface generated by control points

The surface for maximum value of mass density (or thickness)

Control points of the surface

The plane for minimum value of mass density (or thickness)



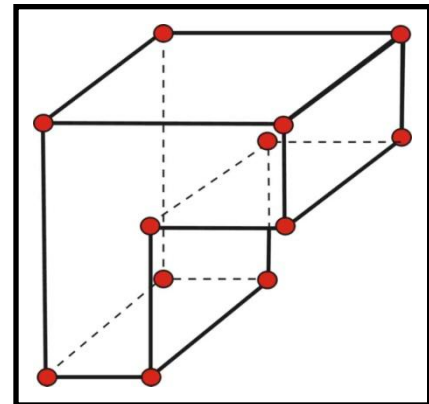
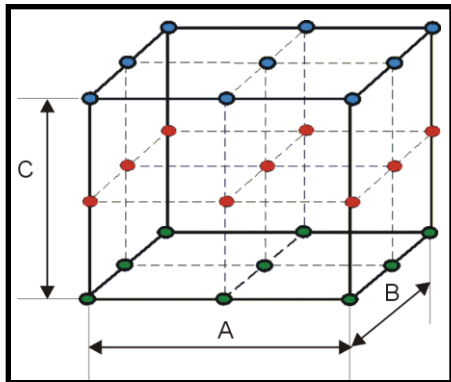
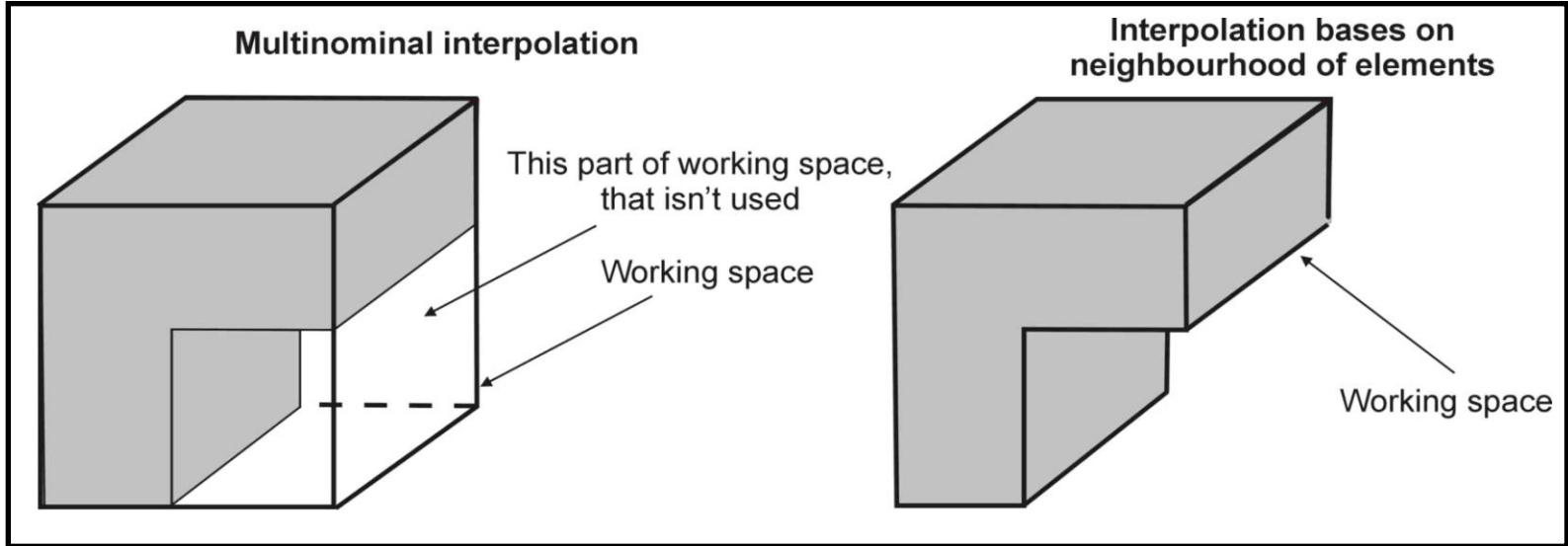
The minimum value of design variable (zero)

Value of mass density (or thickness) for e-th FE

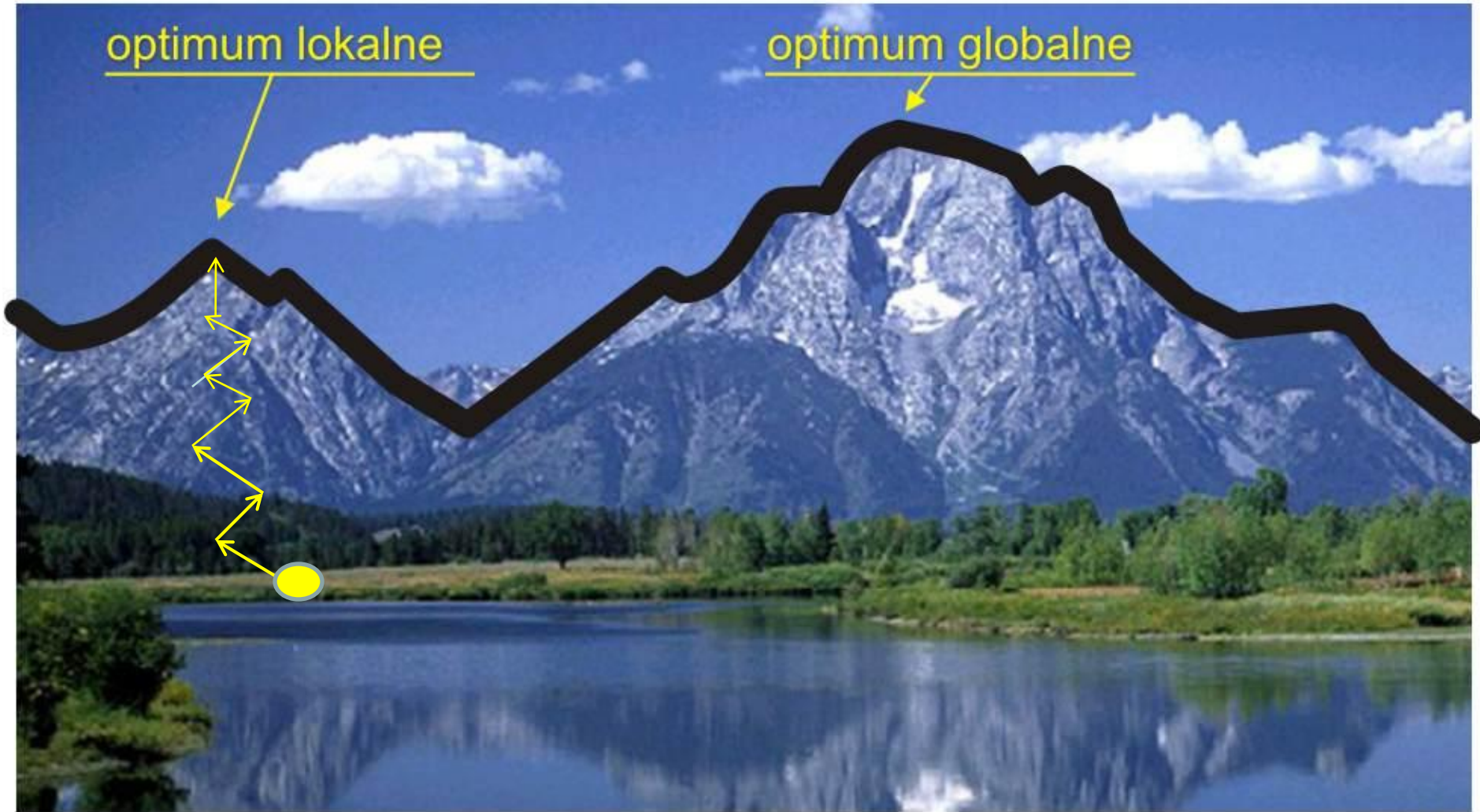
e-th FE

Void

2-D structure



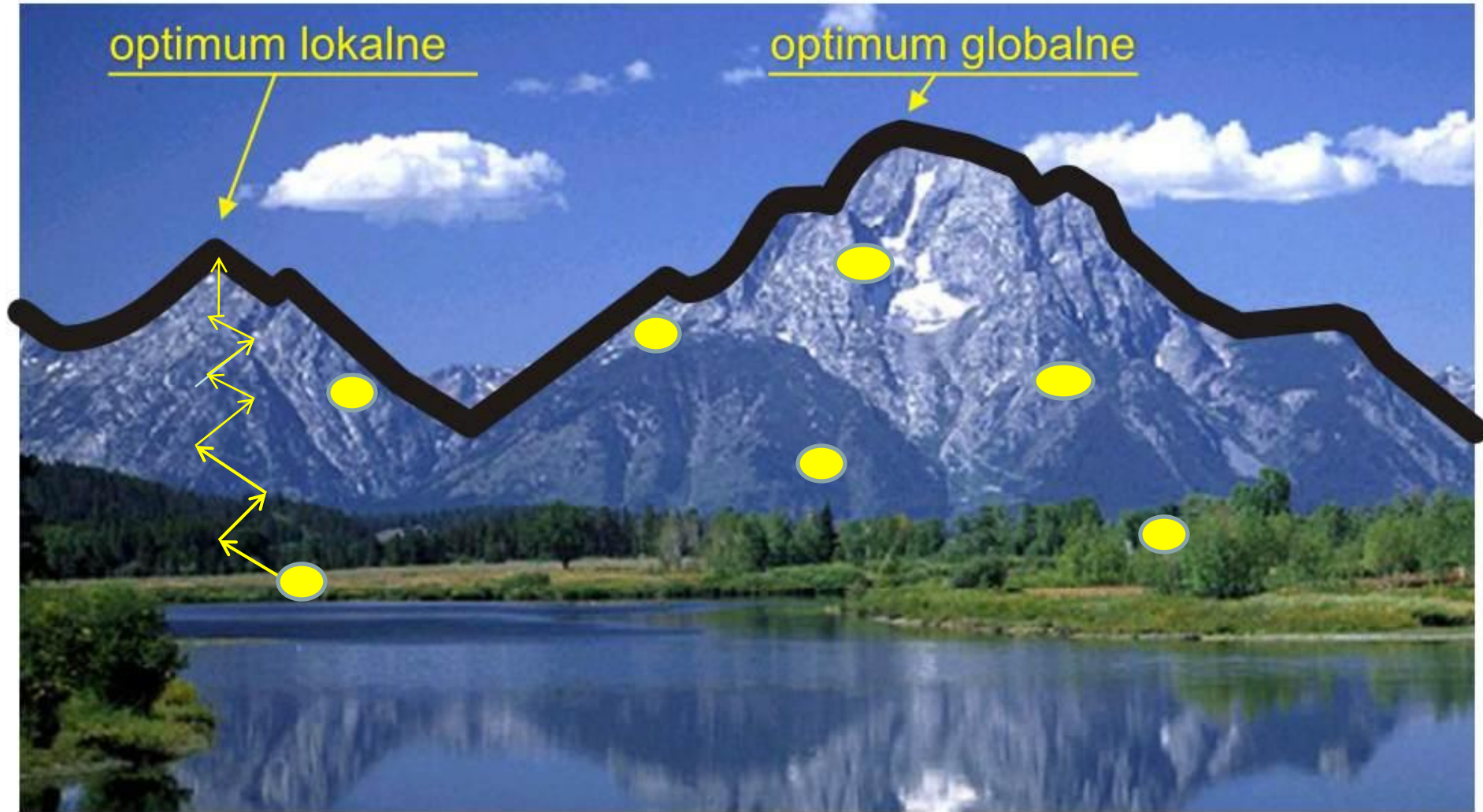
Metody optymalizacji



Metody optymalizacji (1)

- Metody programowania matematycznego
- Metody warunków optymalności
- Metody gradientowe:
 - metoda najszybszego spadku,
 - metoda Newtona i metody quasi-newtonowskie (zmiennej metryki),
 - metoda gradientów sprzężonych
- Analiza wrażliwości (m.in. pochodna topologiczna)

Populacyjne metody optymalizacji



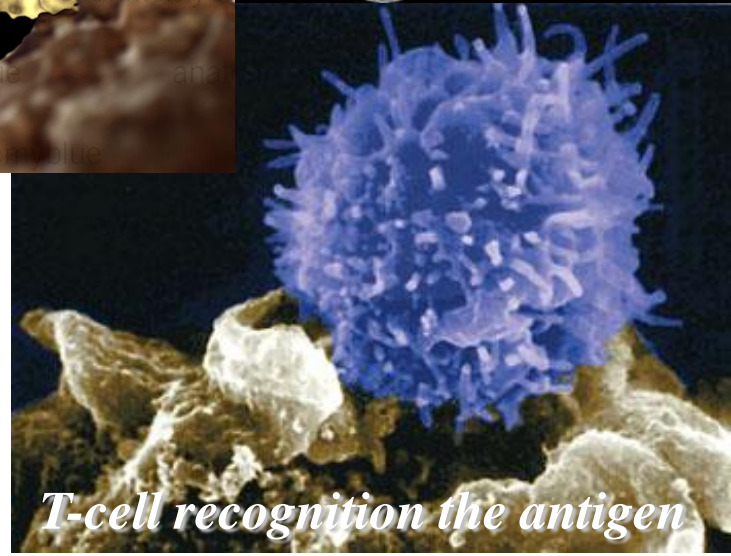
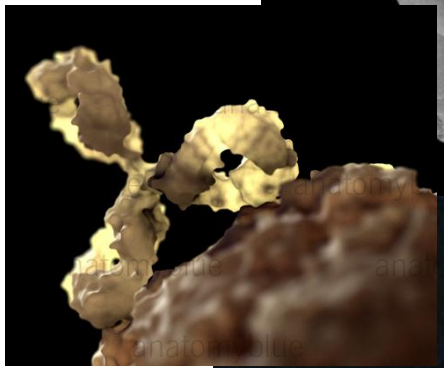
Metody optymalizacji (2)

- Metody inteligencji obliczeniowej:
 - Algorytmy ewolucyjne
 - Sztuczne systemy immunologiczne
 - Metody rojowe (rojów cząstek)
 - Symulowane wyżarzanie

The basis of the artificial immune systems

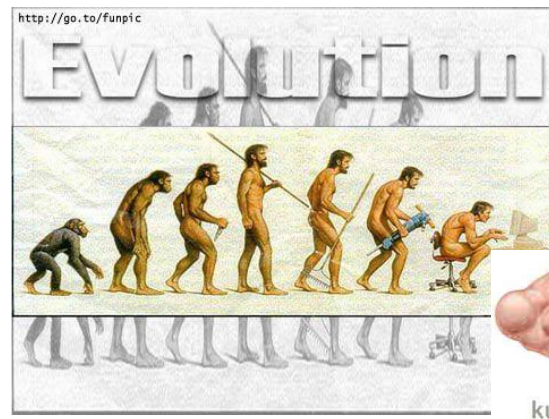


B-cell budding virus



T-cell recognition the antigen

The basis of the evolutionary algorithms

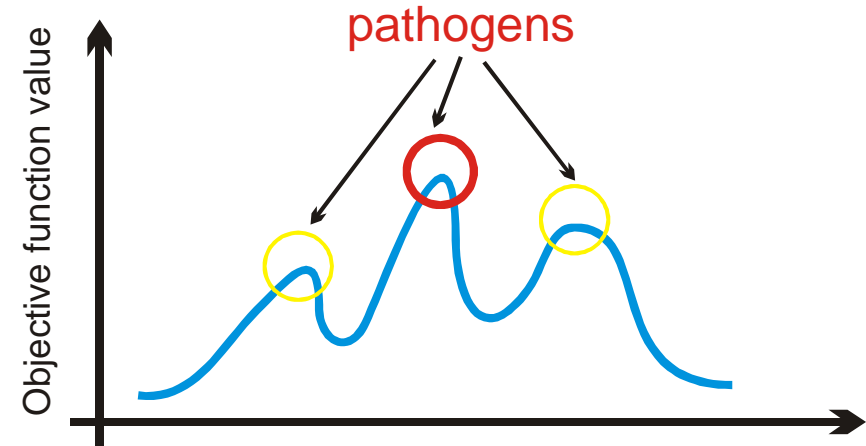


Copyright Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON 2003

K. Sabath



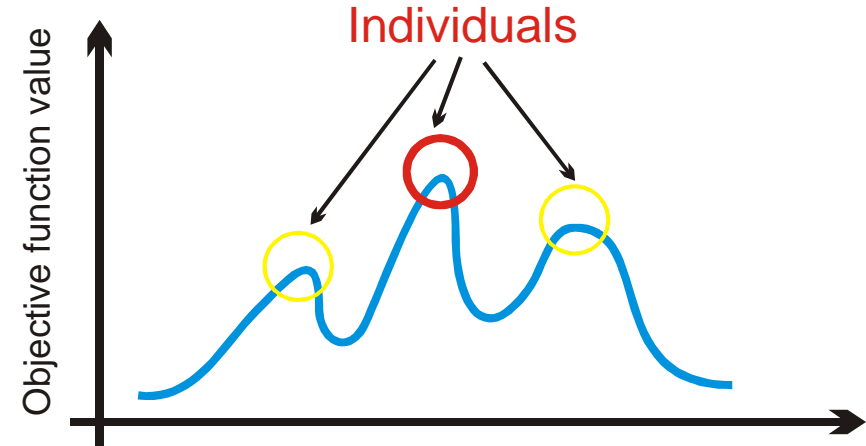
Artificial immune systems



The goal of AIS

*find the most dangerous pathogen
i.e. the global optimum
of objective function*

Evolutionary algorithms

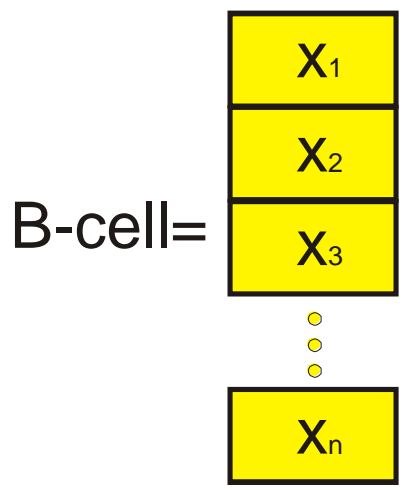


The goal of EA

*find the fittest chromosom
i.e. the global optimum
of objective function*

Artificial immune systems

*floating point
representation*



$$X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$$

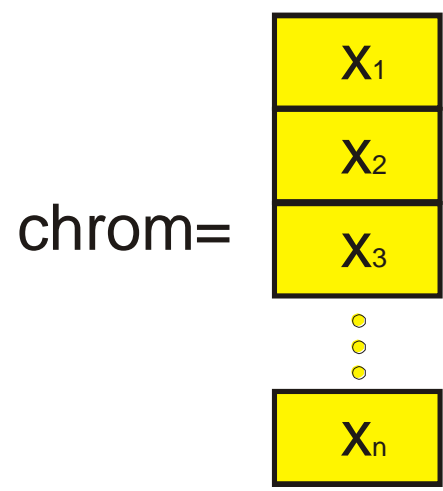
x_i – design variable

(parameters of B-cell receptor)

B-cell receptor

Evolutionary algorithms

*floating point
representation*



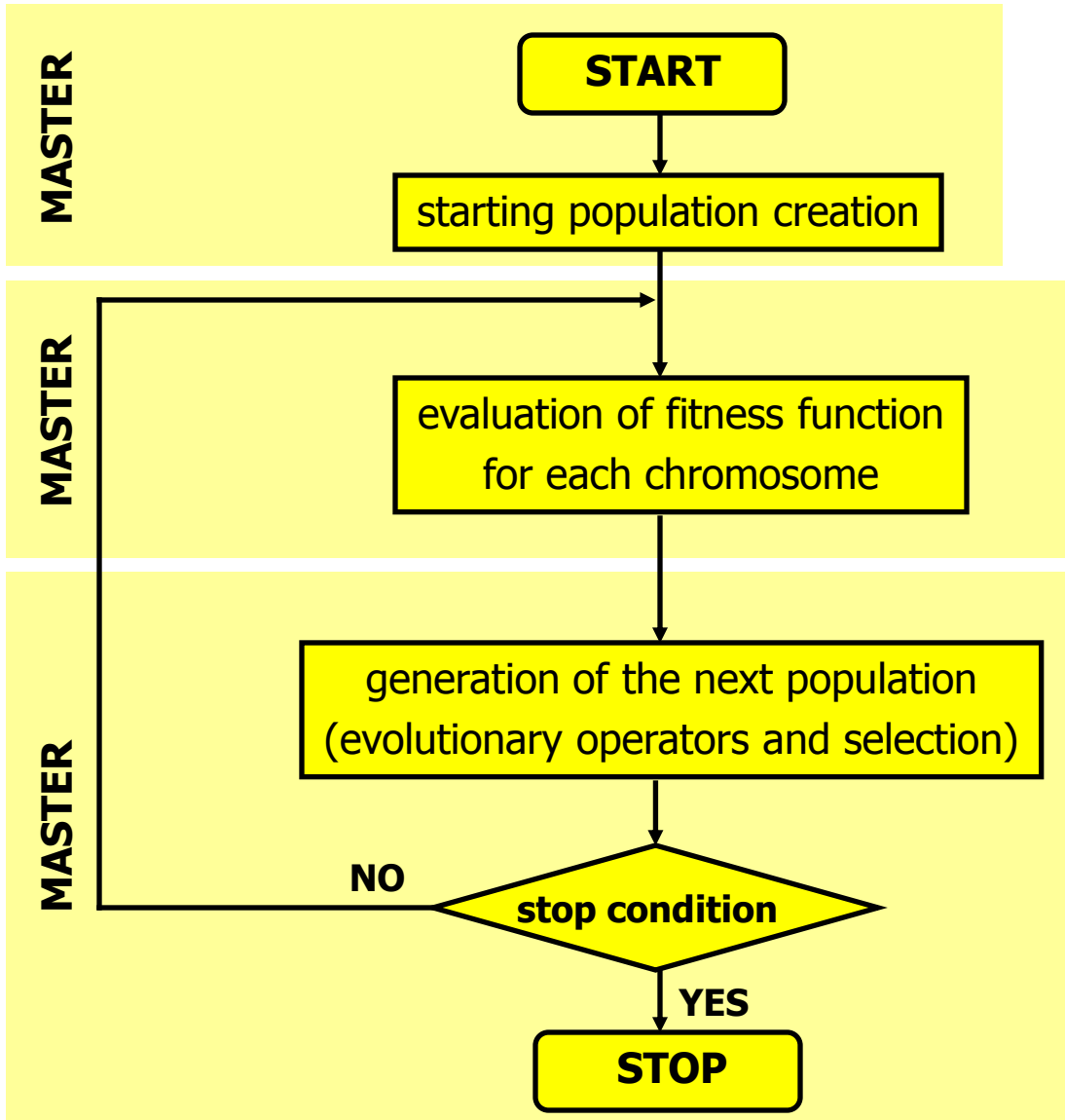
$$X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}$$

x_i – design variable

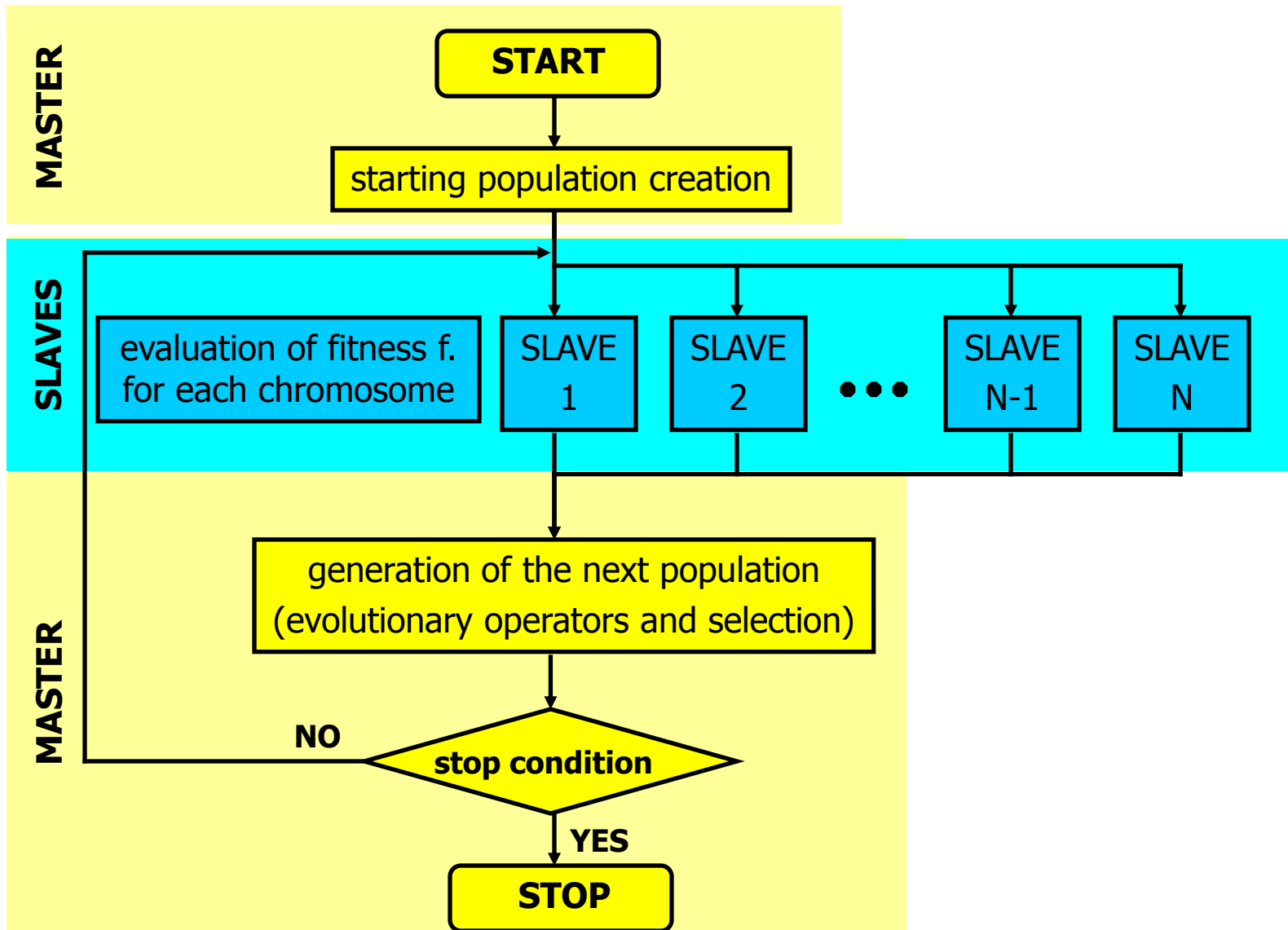
(genes)

Chromosome

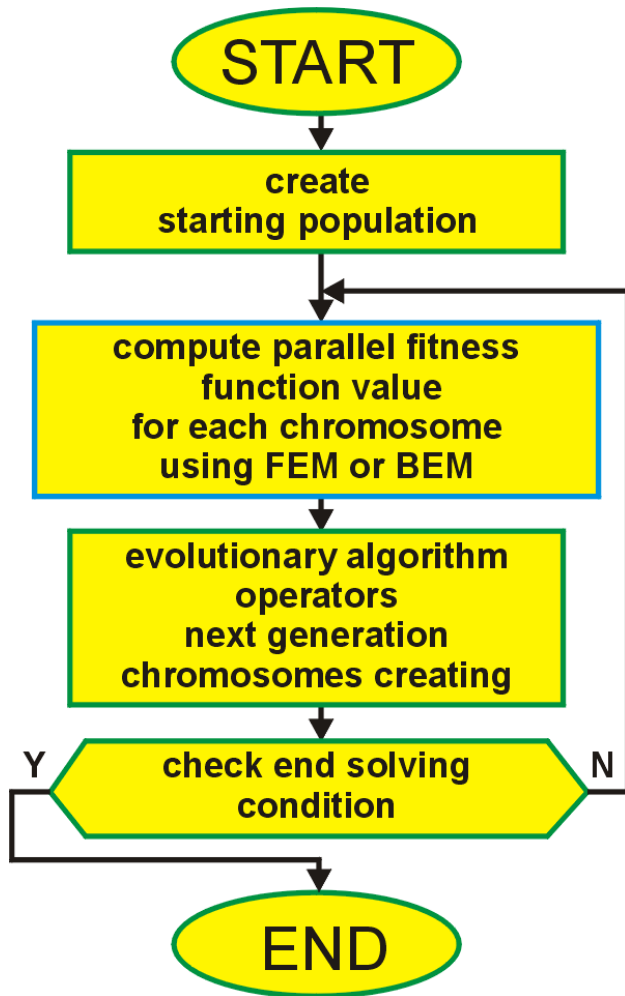
SEKWENCYJNY ALGORYTM EWOLUCYJNY



RÓWNOLEGŁY ALGORITHM EWOLUCYJNY

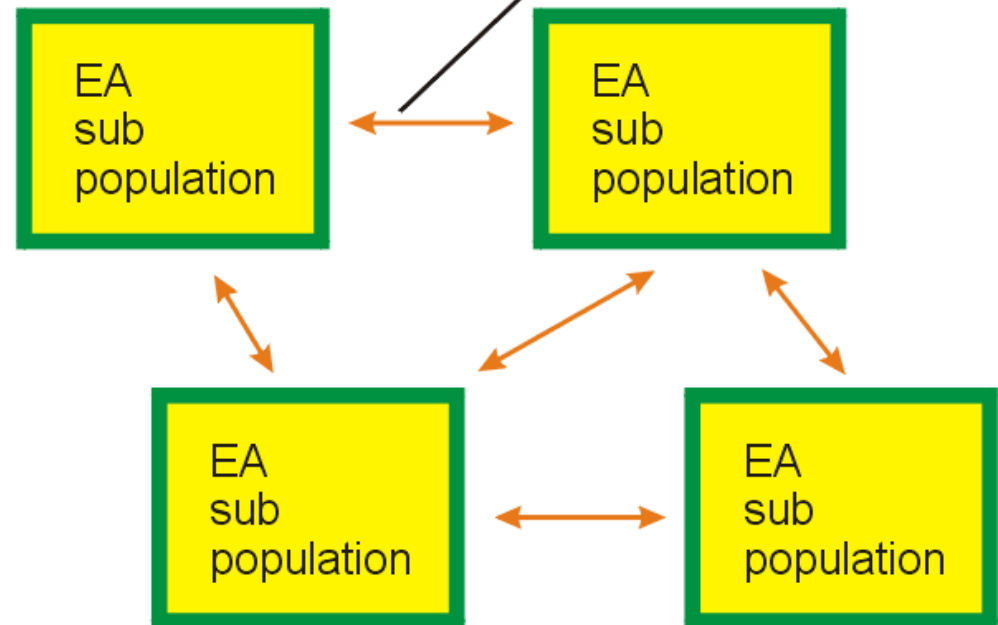


Równoległy AE

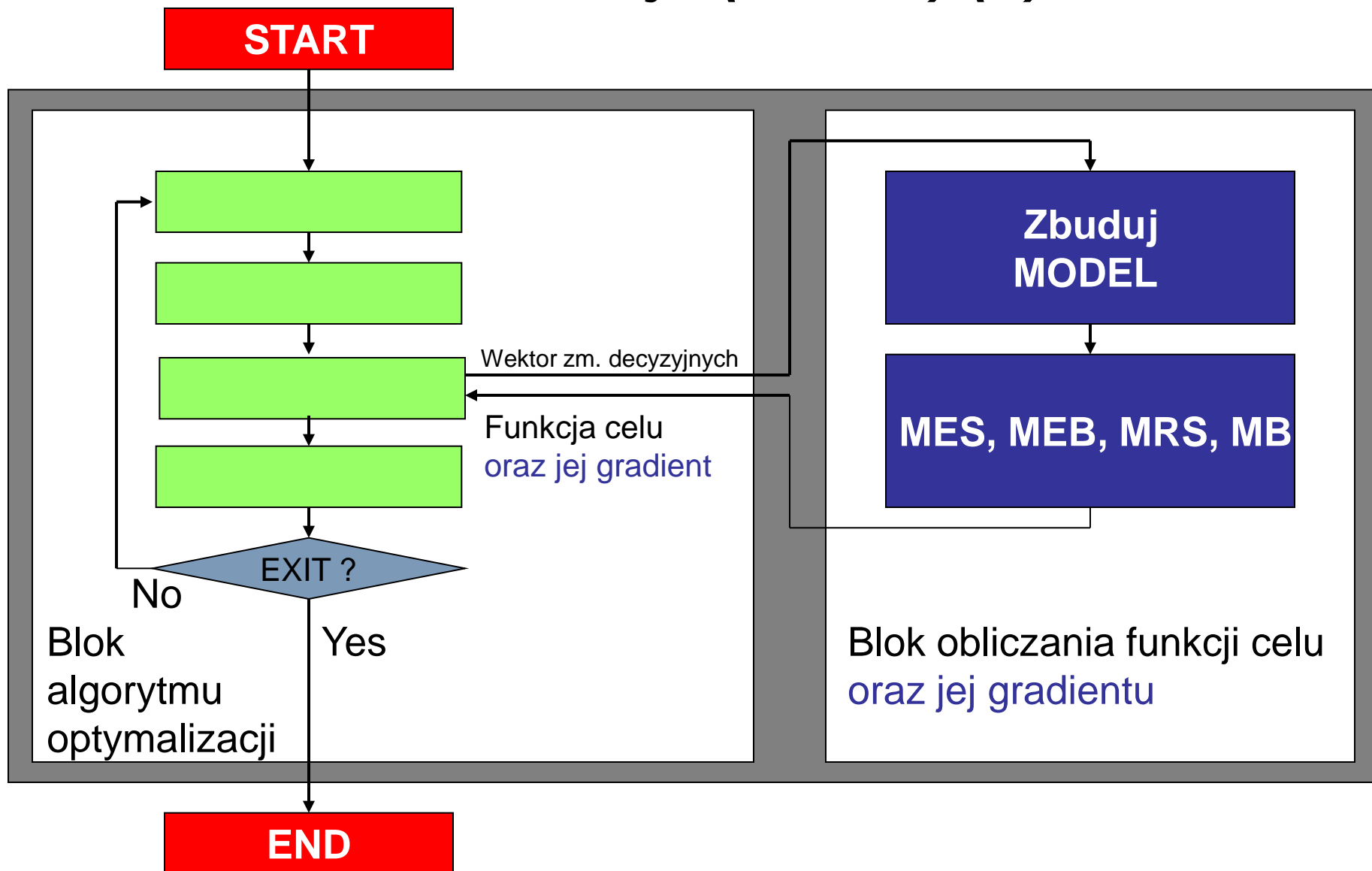


Rozproszony AE

communication between EAs



Komputerowe wspomaganie optymalizacji konstrukcji (CAOD) (1)



Komputerowe wspomaganie optymalizacji konstrukcji (CAOD) (2)

- Brak jest uniwersalnych programów komputerowych optymalizacji konstrukcji
- Najczęściej budowane są programy komputerowe dedykowane do pewnej klasy zadań optymalizacji dla wybranych kryteriów oraz sposobu parametryzacji
- Otrzymywane wyniki są często niesatysfakcjonujące i wymagają odpowiedniej interpretacji
- Do rozwiązania zagadnienia bezpośredniego najczęściej stosowana jest MES lub MEB
- Uniwersalne programy komputerowe optymalizacji konstrukcji możliwe są tylko w postaci systemów ekspertowych

Optymalizacja konstrukcji prętowych (1)

$$mass = \rho \sum_{i=1}^n l_i \cdot A_i$$

n - number of the member

l - length of the member

A - cross-sectional areas of members

ρ - density of the material

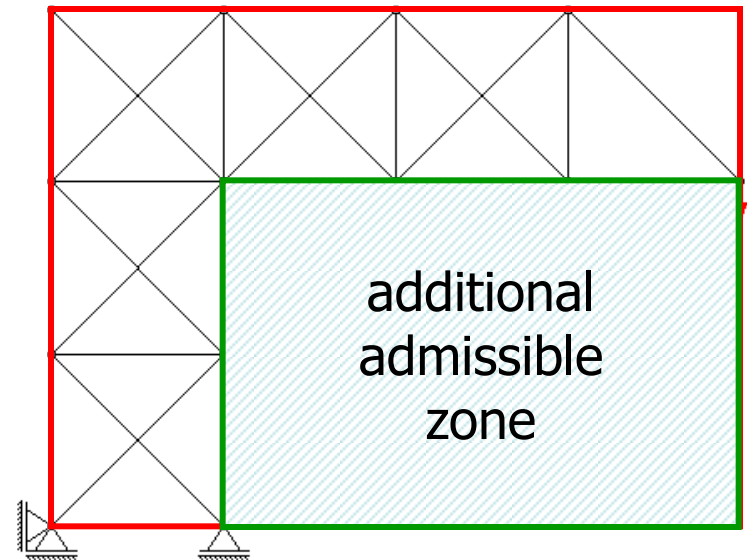
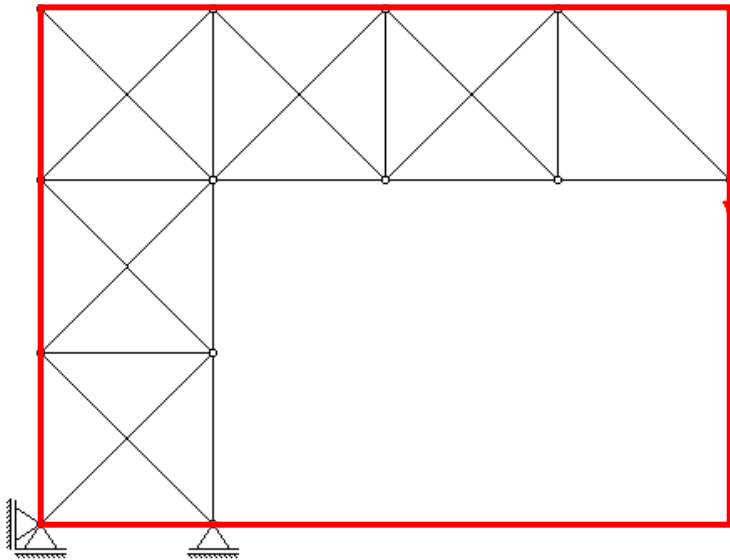
$$fitness \quad function = mass + penalty$$

$$penalty = \begin{cases} 0 & \max(\sigma) \leq \sigma_{eq} \\ \infty & \max(\sigma) > \sigma_{eq} \end{cases}$$

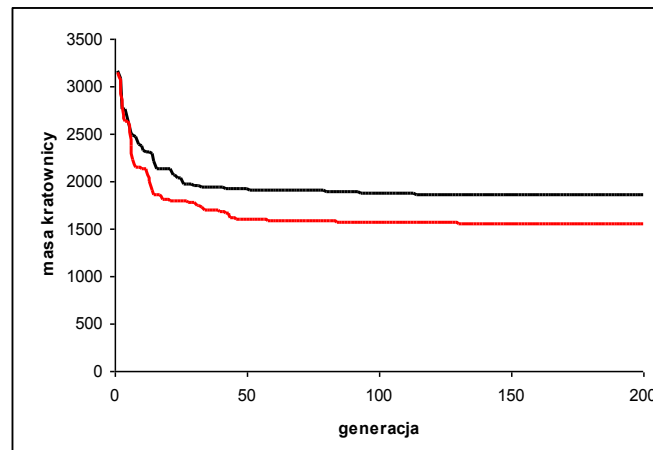
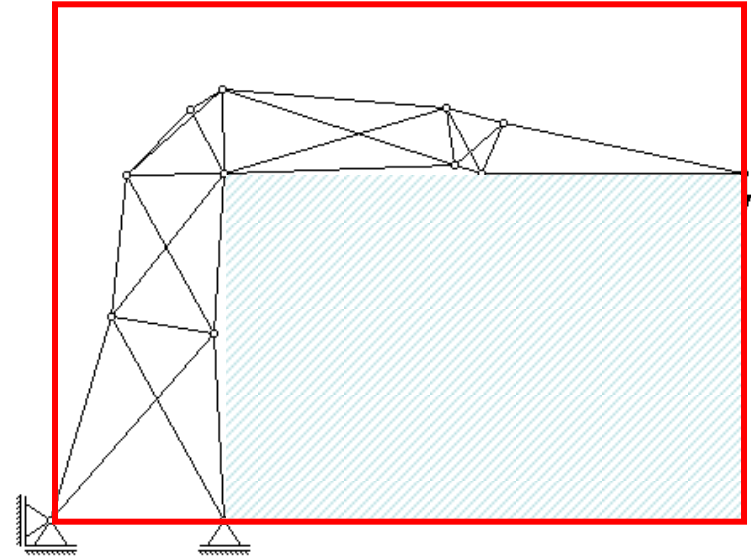
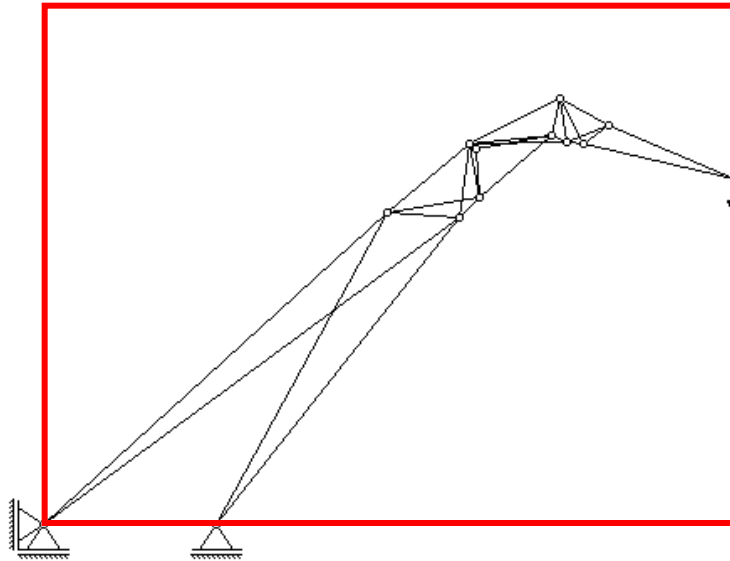
Optymalizacja konstrukcji prętowych (2)

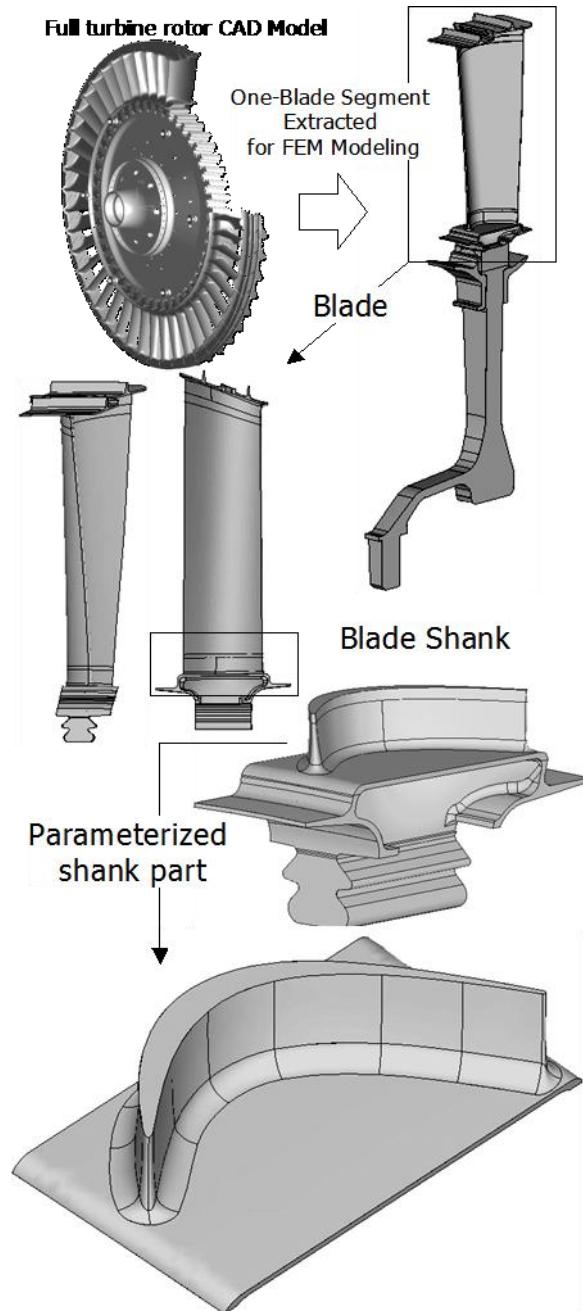


- Admissible zone for changing of coordinates of joints



Optymalizacja konstrukcji prętowych (3)





Optymalizacja kształtu łopatki turbiny

Criterion:

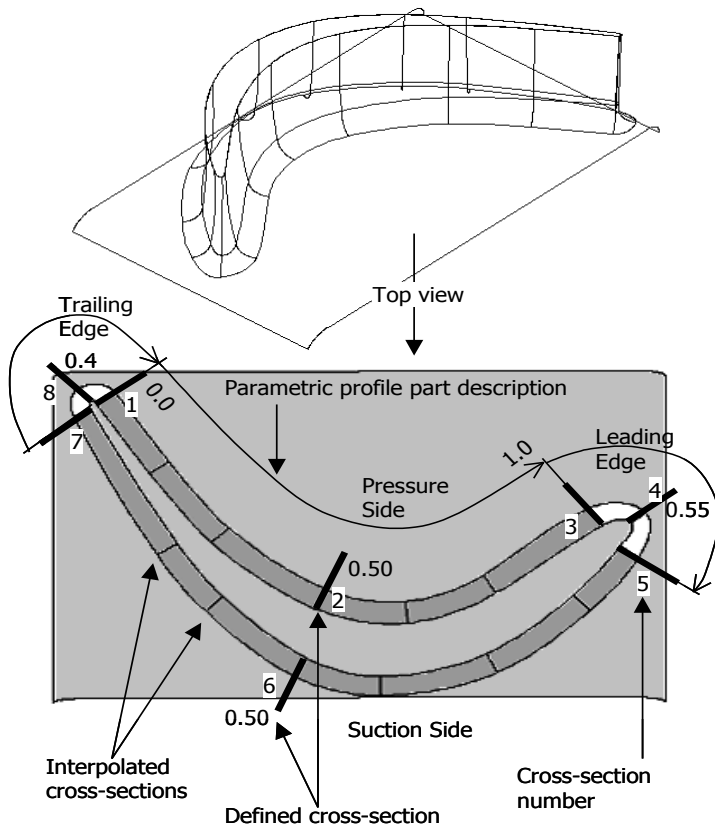
$$\min_{Ch} \sigma$$

σ - 1st principal stress

Constraint:

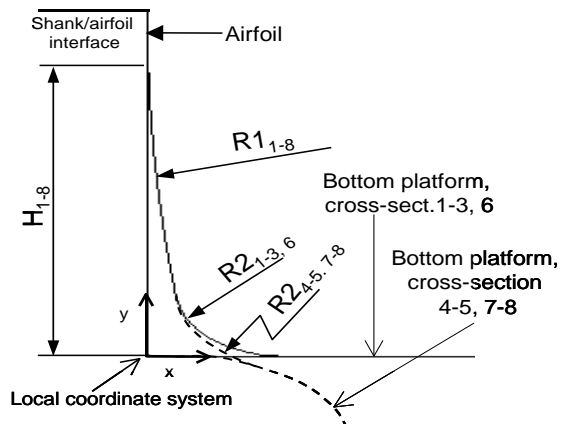
$$\int_{\Omega} \rho d\Omega \leq M_o$$

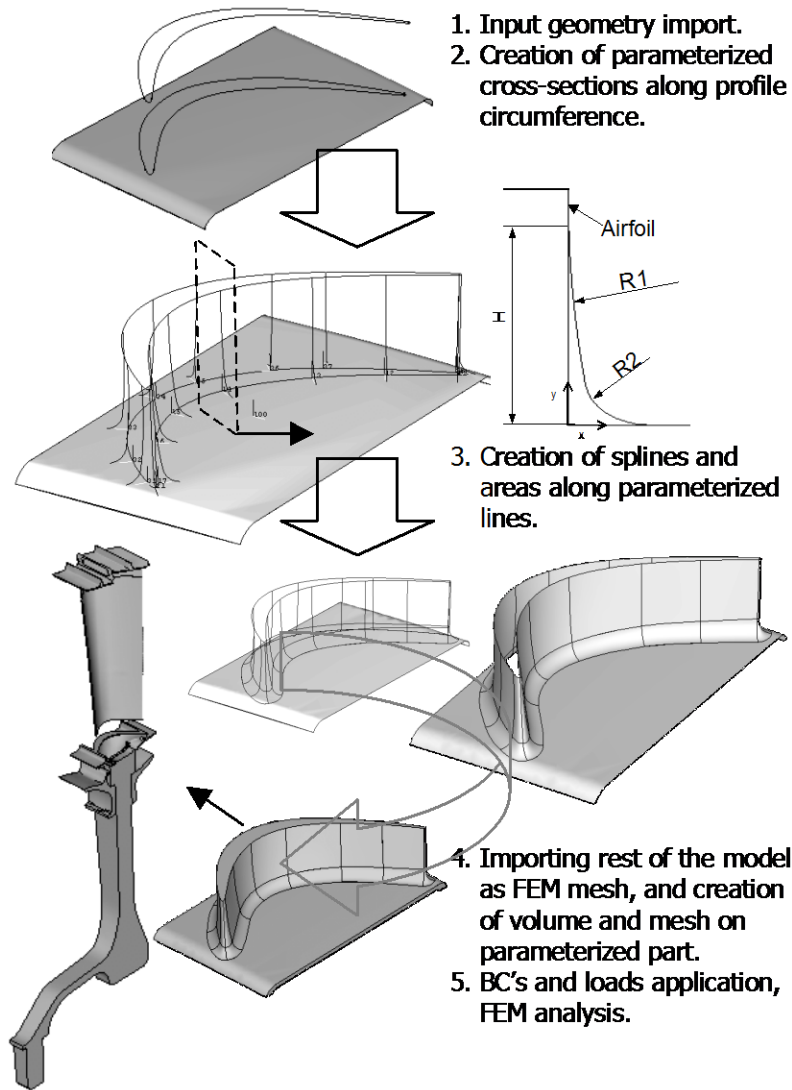
Typical bladed disc model
with isolated
parameterisation zone



Parameterisation of compound fillet zone

Defined cross-sections parameterization:



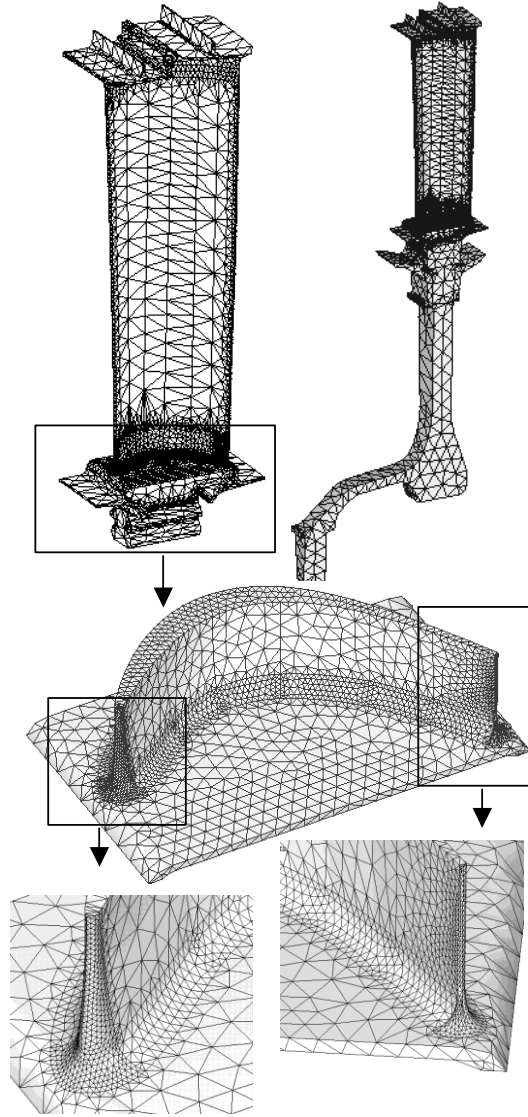


Chromosome:

$$\mathbf{Ch} = [x_1, \dots, x_8, x_9, \dots, x_{16}, x_{17}]$$

$$\mathbf{Ch} = [R1_1, \dots, R1_8, R2_1, \dots, R2_8, H]$$

Process of parameterised FEM model generation



FEM Model

185000 DOFs

Optymalizacja topologiczna

Fitness function

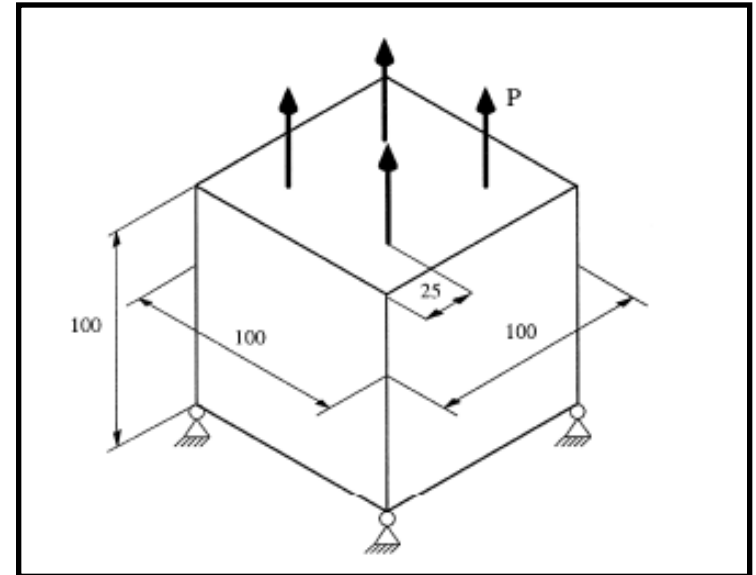
$$U = \frac{1}{2} D^T K D$$

Constraints:

$$K D = F \quad \sum_{k=1}^N \rho_k V_k - V_{fixed} \leq 0$$

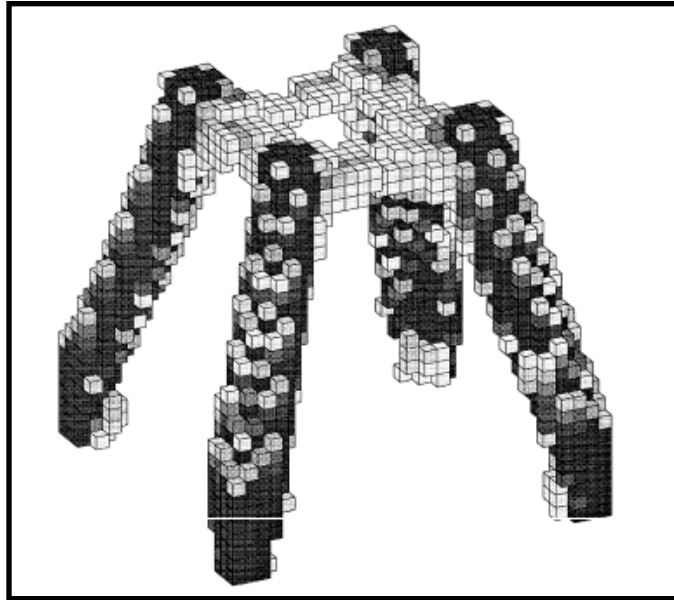
$$0 \leq \rho \leq 1, \quad k = 1, \dots, N$$

a x b x c [m]	Loading [N]
100 x 100 x 100	Q=4x10



Scheme of loading

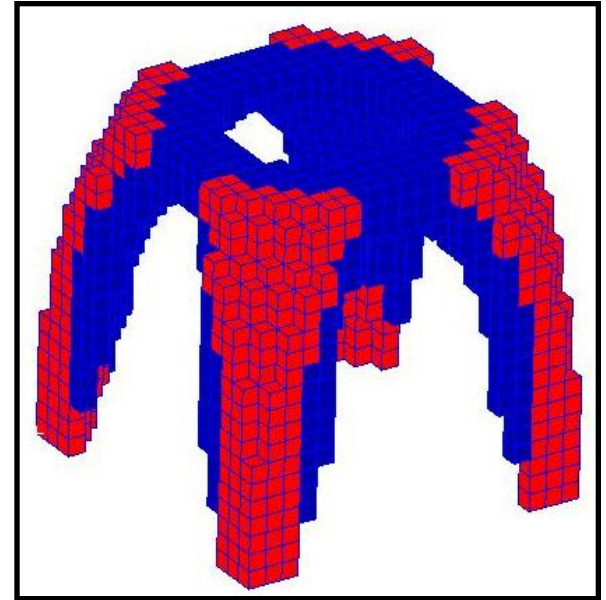
Comparison results of computation with example of authors: Jorgen Bay Jacobsen, Niels Olhoff, Erik Ronhoff, *Mechanics of Materials* 28(1998), 207-225



$$U_{\min} = 28.28e-10 \text{ Nm}$$



$E = 2e^5 \text{ MPa}$ - steel



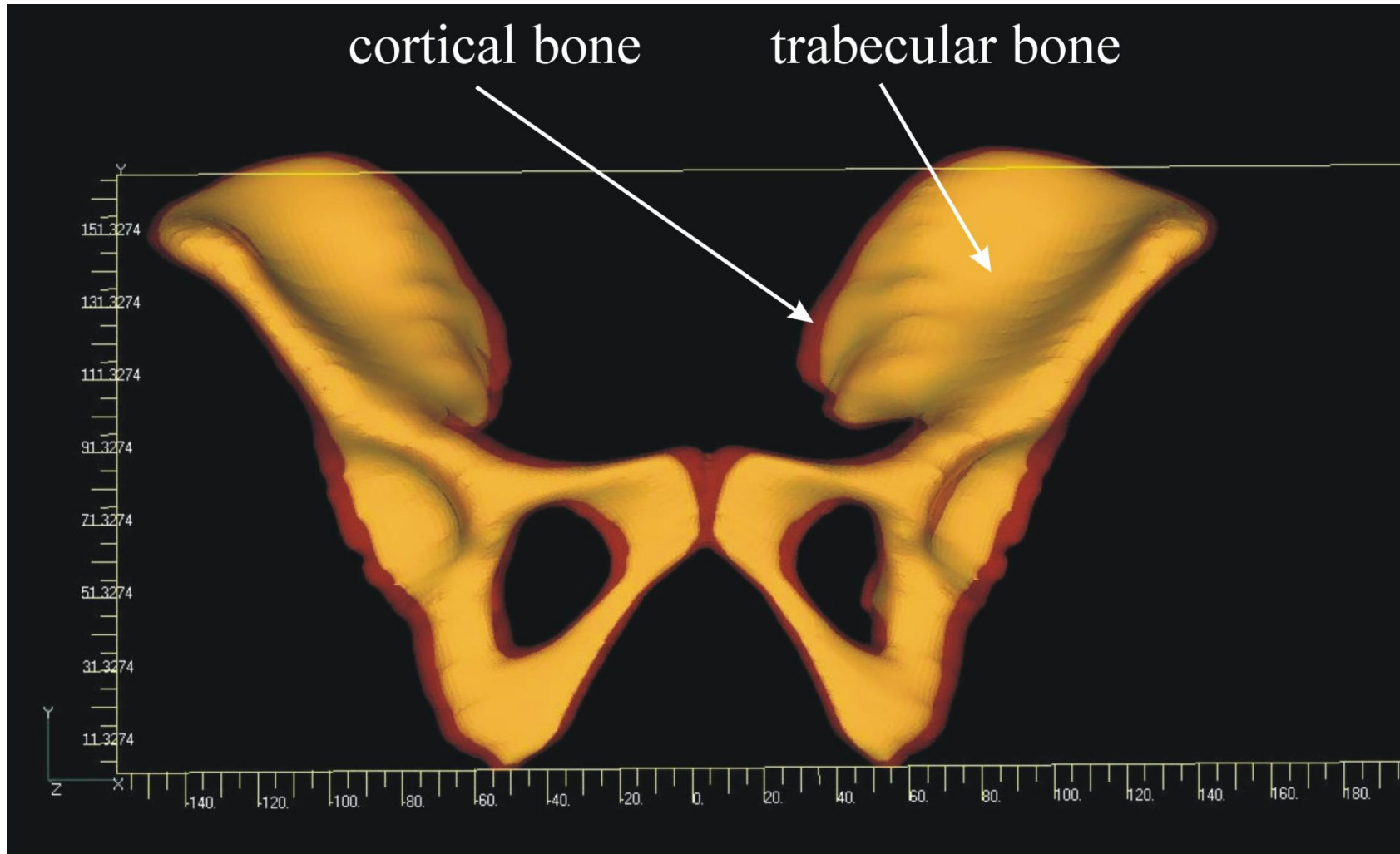
$$U_{\min} = 27.4e-10 \text{ Nm}$$



$E = 0.7e^5 \text{ MPa}$ - aluminum

Structures after optimization

Identyfikacja parametrów kości

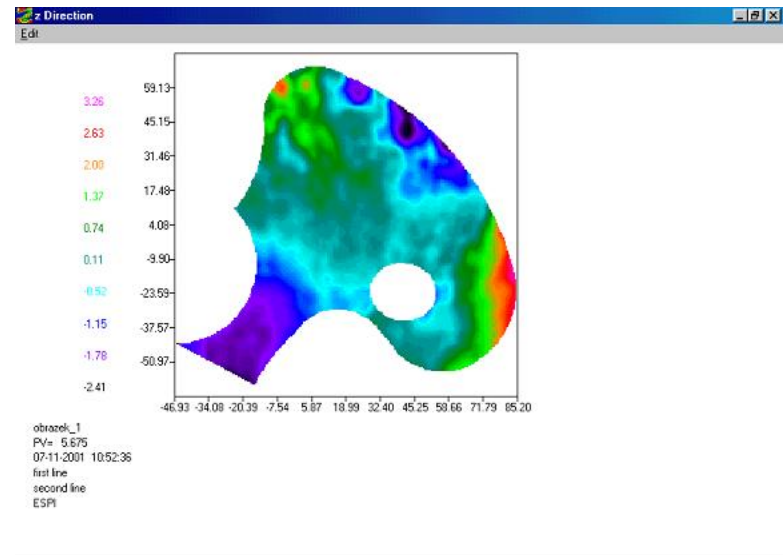
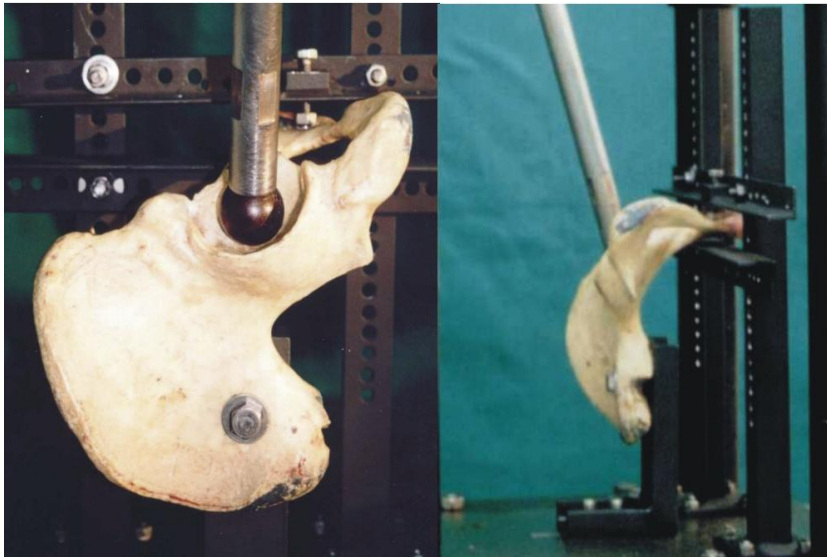


Model of pelvis consists of two types of bone: cortical bone and trabecular bone

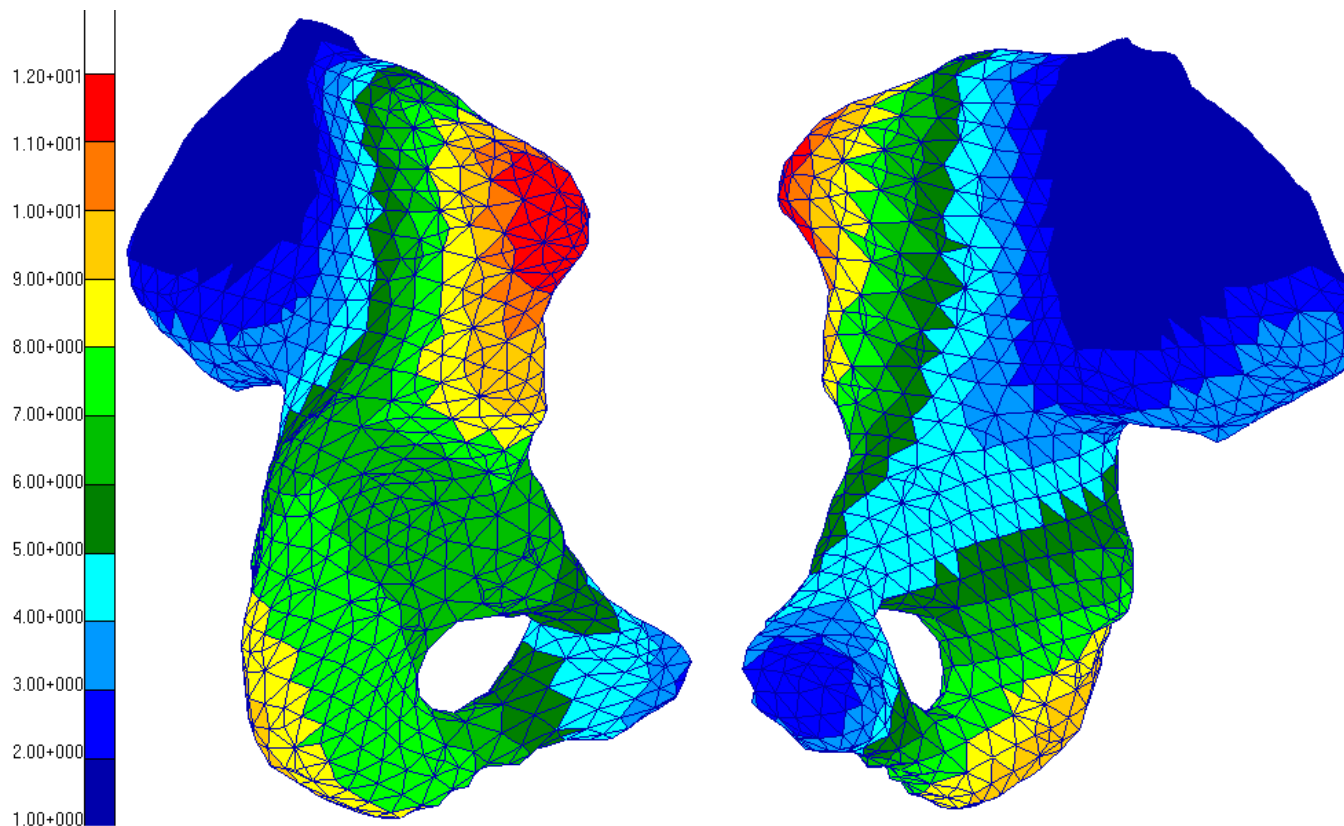
Funkcja celu

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \equiv \sum_k \sum_i \left| \frac{\hat{u}_i - u_i}{\hat{u}_i} * 100 \right|$$

Przemieszczenia mierzone za pomocą ESPI



Identyfikacja parametrów kości korowej



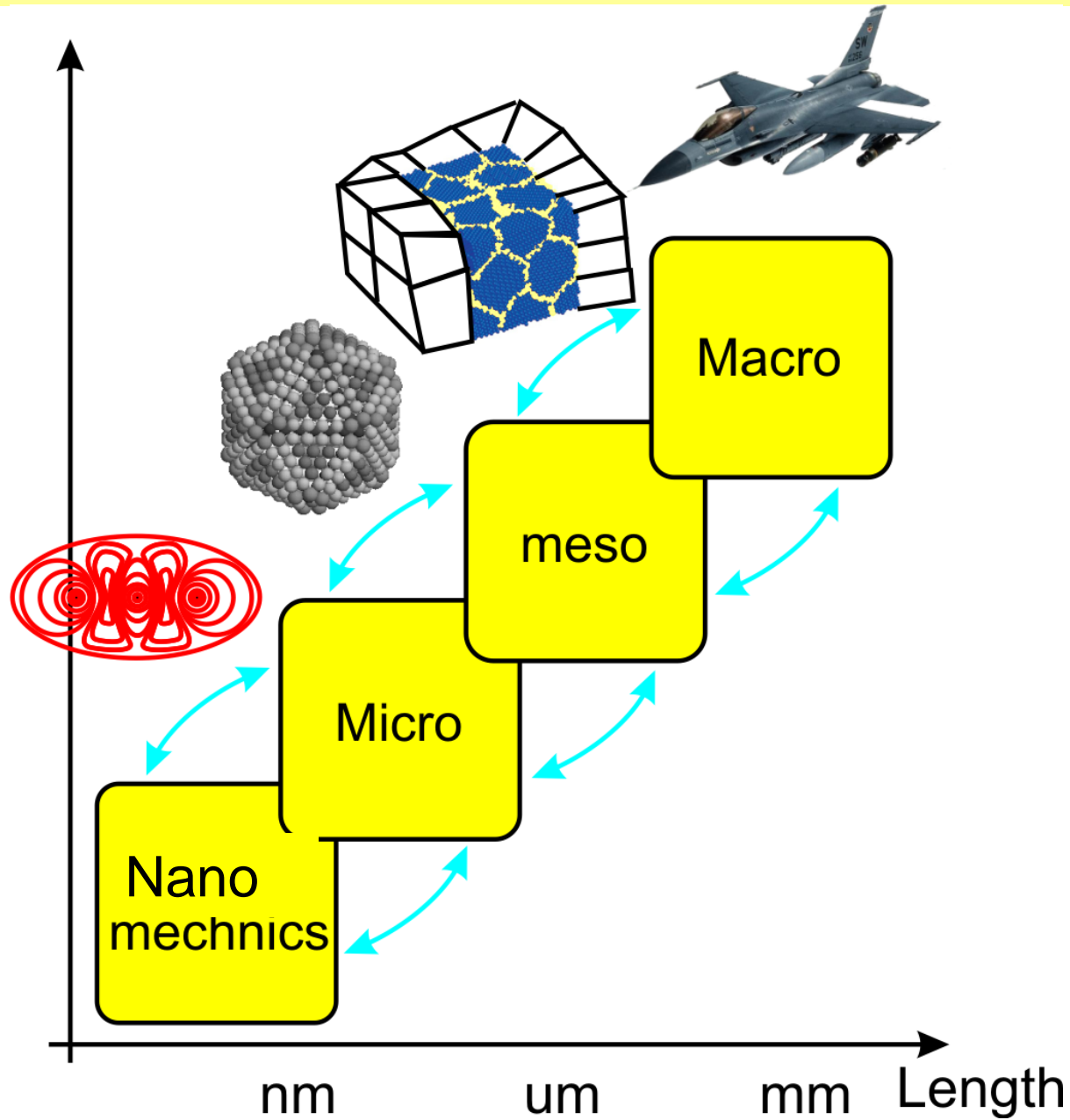
Color index	Young modulus ranges MPa
1	≤ 2500
2	2500-4900
3	4900-7300
4	7300-9700
5	9700-12100
6	12100-14500
7	14500-16900
8	16900-19300
9	19300-21700
10	21700-24100
11	24100-26500
12	26500-28900

Kierunki rozwoju (1)

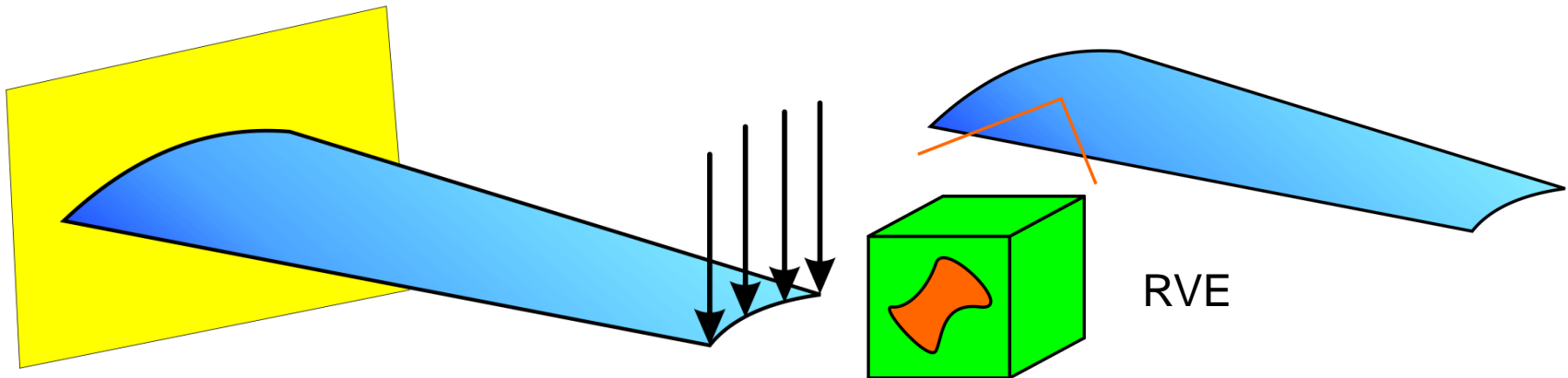
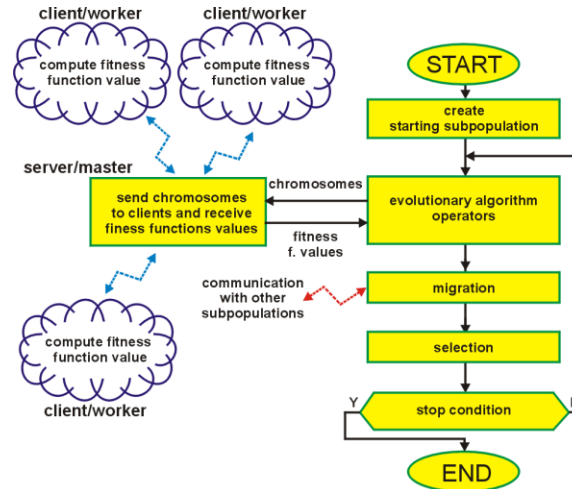
**Identyfikacja i optymalizacja
w modelowaniu wieloskalowym**



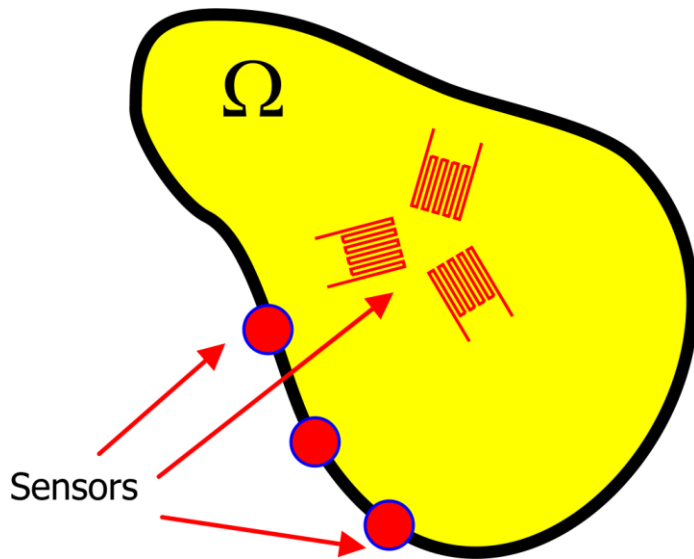
Podeście wieloskalowe



Identyfikacja w modelowaniu wieloskalowym – strojenie modelu



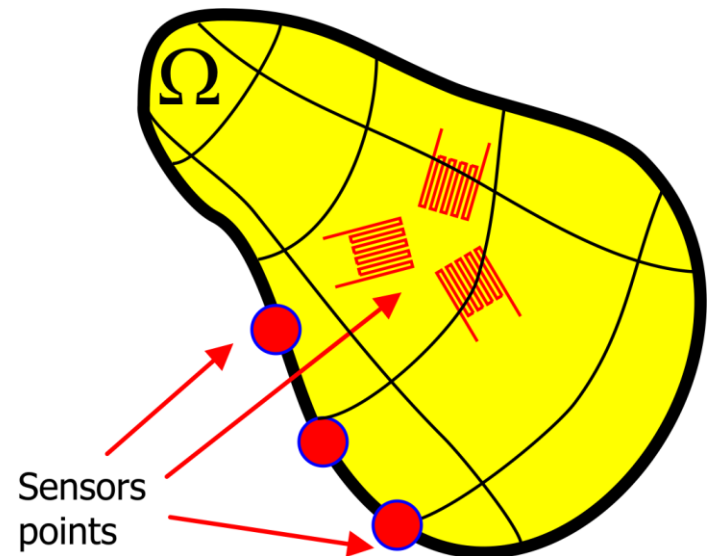
Cel – znaleźć parametry modelu w skali mikro na podstawie pomiarów eksperymentalnych w skali makro



Układ rzeczywisty

Jakie parametry materiałowe modelu dają takie same wyniki w punktach pomiarowych (sensor points) jak w układzie rzeczywistym?

Model dyskretny MES



IDENTYFIKACJA

$$\min_{Ch} J_0$$

gdzie

$$J_0 = a \sum_{j=1}^m |u_i - \hat{u}_i| + b \sum_{j=1}^m |\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i|$$

$$Ch = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

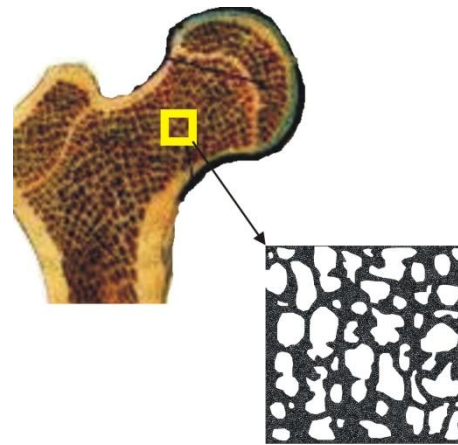
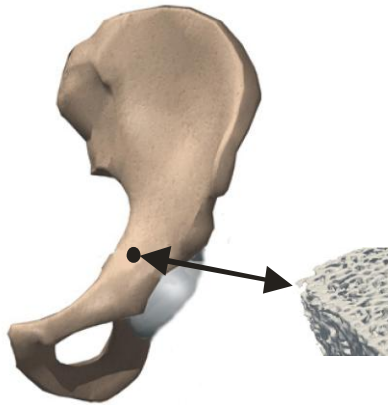
$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

x_i – zmienne decyzyjne – parametry materiałowe lub geometryczne w skali mikro

u_i i \hat{u}_i – obliczone i zmierzone przemieszczenia,

ε_i i $\hat{\varepsilon}_i$ – obliczone i zmierzone odkształcenia.

Identyfikacja mikrostruktury kości



Optymalizacja wieloskalowa

gdzie

$$\min_{Ch} J_o$$

J_o – funkcja celu opisana
w skali makro

$$Ch = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

- chromosom
(wektor zmiennych decyzyjnych)

x_i – geny (zmienne decyzyjne) opisujące parametry geometryczne
lub materiałowe w skali mikro

ograniczenia:

$$J_\alpha \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$J_\alpha = J_\alpha(u, \varepsilon, \sigma), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, m$$

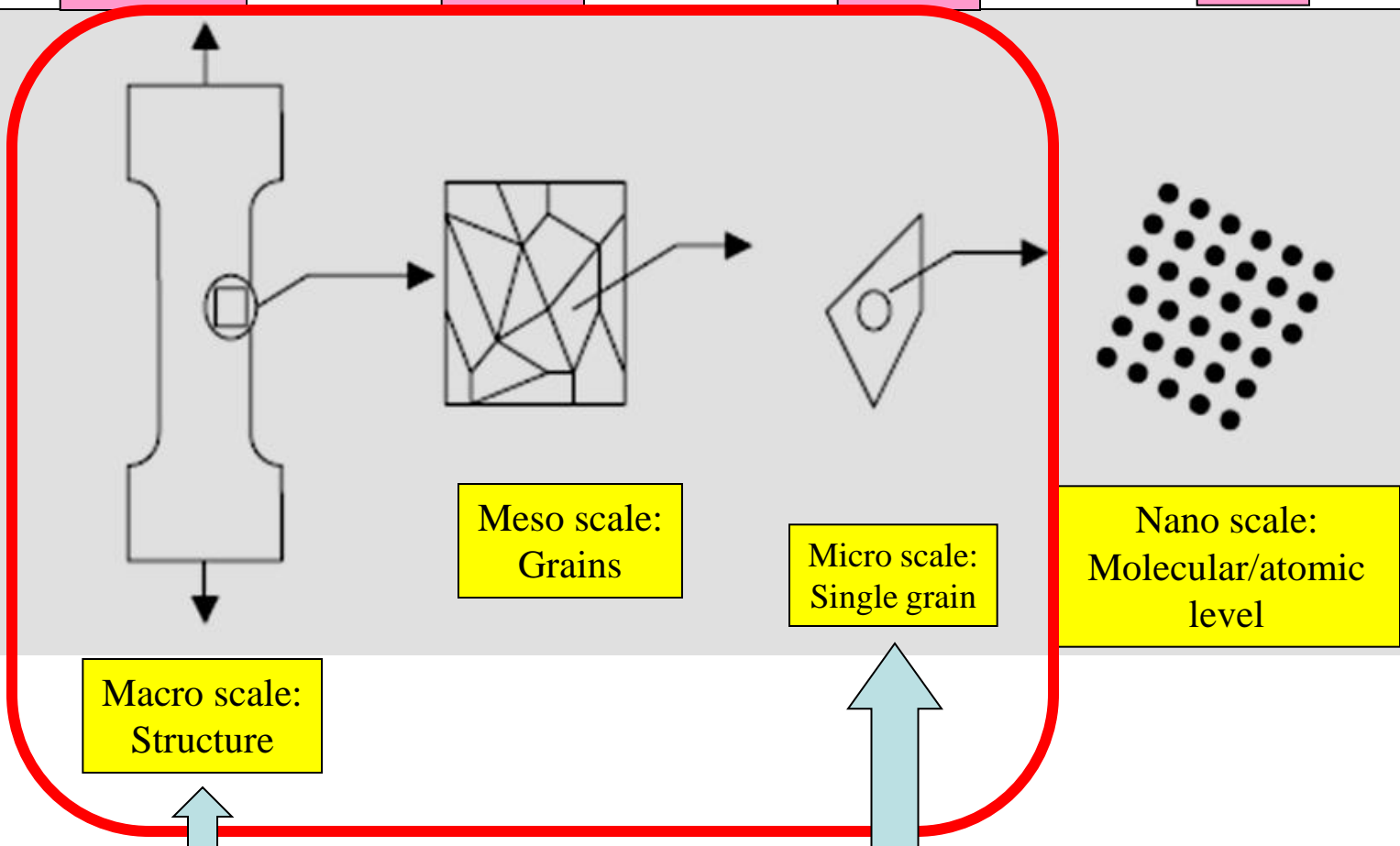
Scale:

m, cm

mm

μ m

nm



Macro scale:
Structure

Meso scale:
Grains

Micro scale:
Single grain

Nano scale:
Molecular/atomic
level

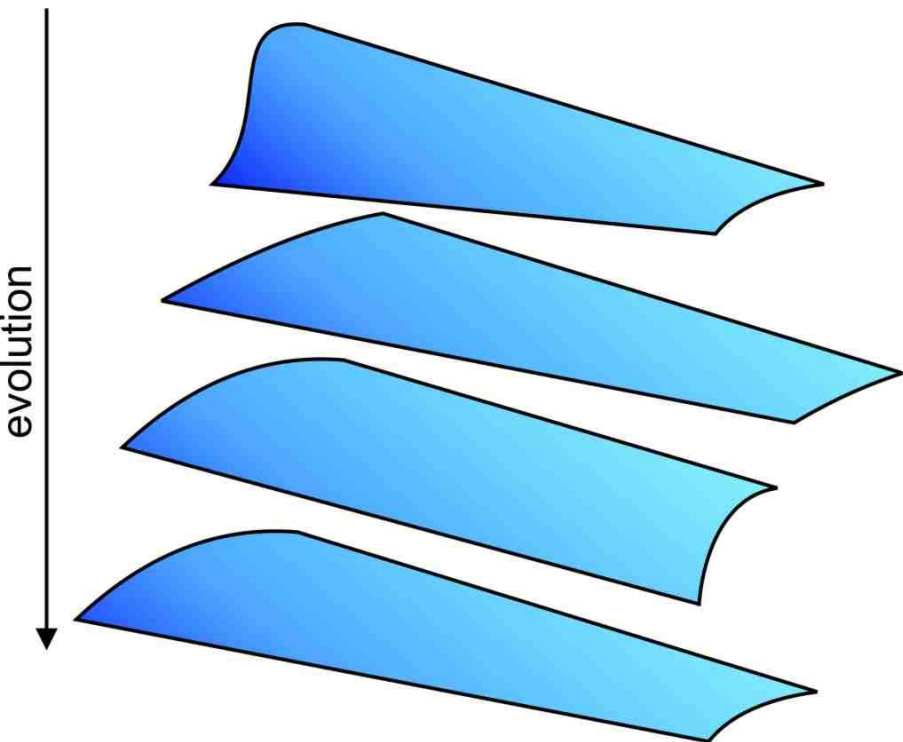
$$J_0 \equiv J_0(u, \varepsilon, \sigma)$$

$$Ch = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]$$

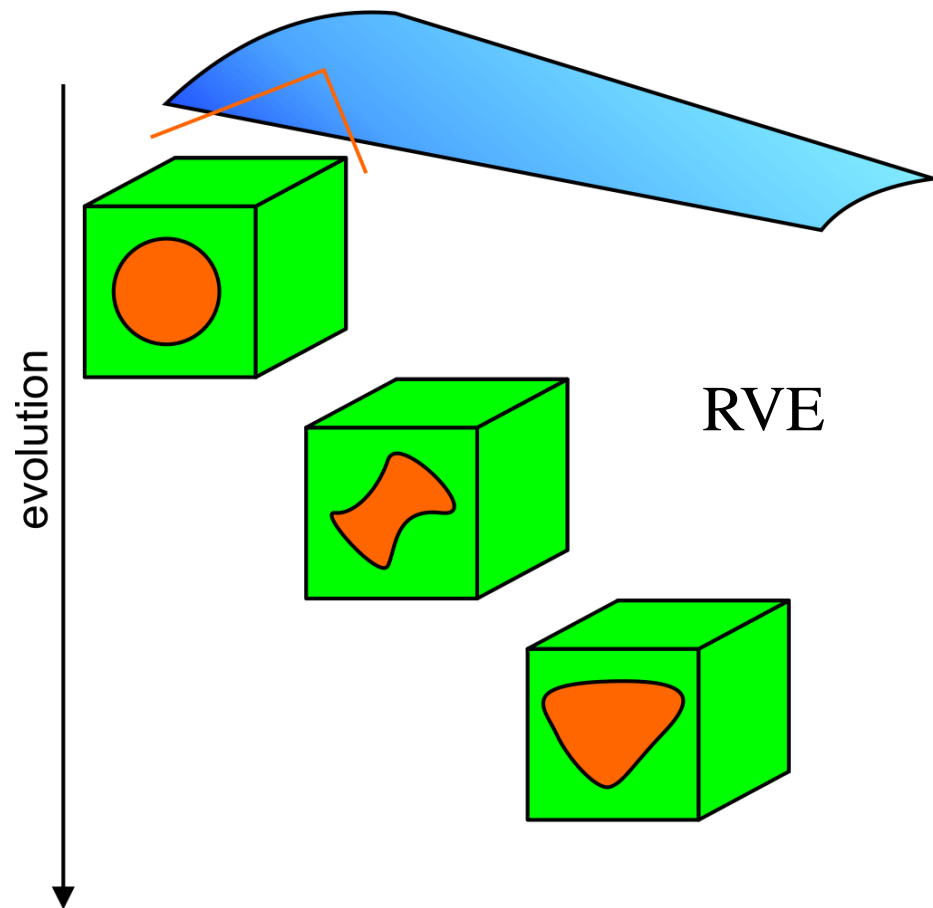


Ewolucyjna optymalizacja wieloskalowa

Skala makro

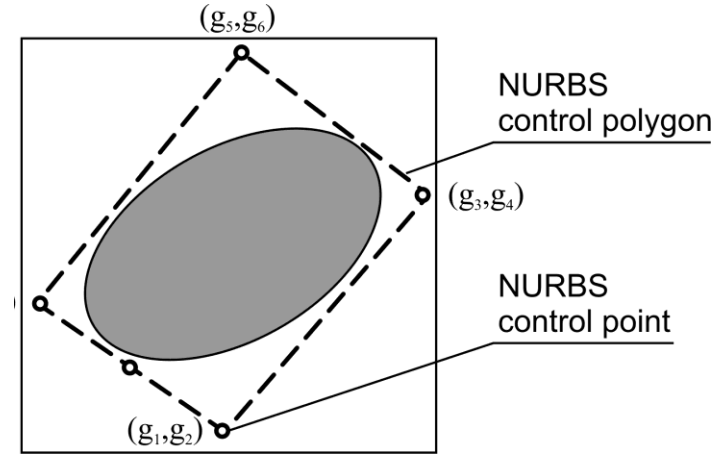
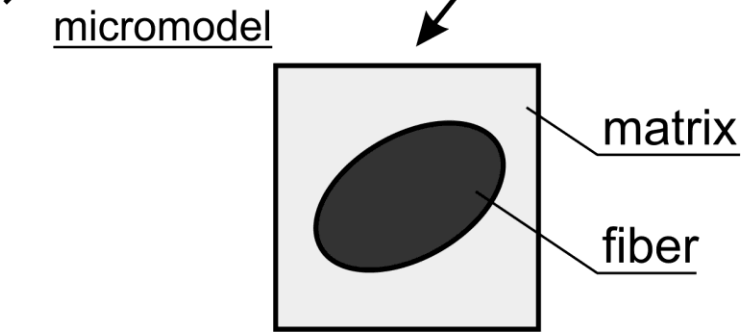
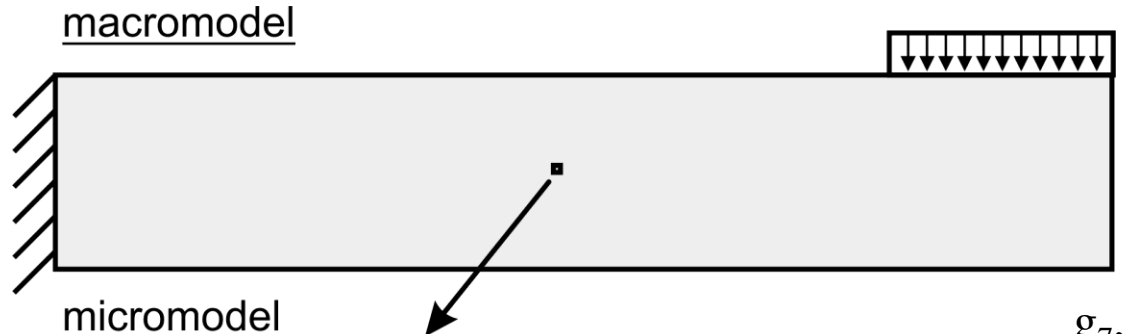


Skala mikro



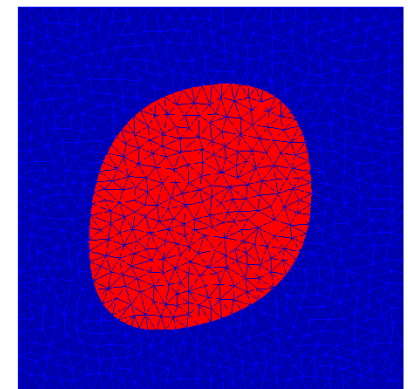
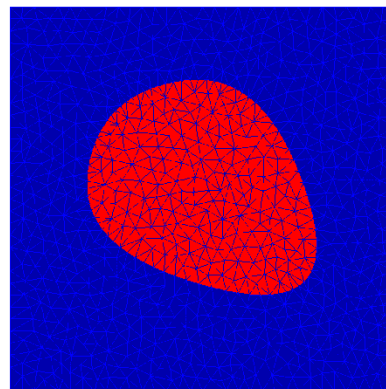
$$\min_{Ch} J_0, \text{ where } J_0 = u_{\max}$$

$$Ch = [g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8]$$



The best solution in the 1st generation

The best solution in the last generation



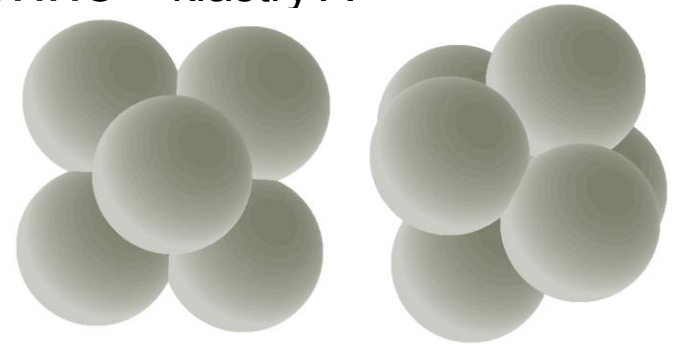
- DEA parameters:
- 2 subpopulations
 - 20 chromosomes in each
 - Rank selection
 - Gauss mutation
 - Simple crossover

Optymalizacja klastrów atomowych

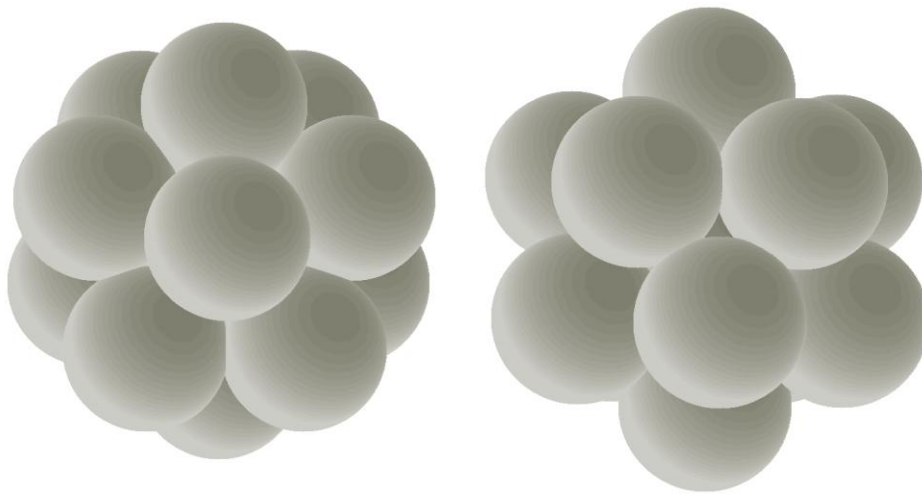
Najstabilniejsze konfiguracje przestrzenne – klastry Al Morse'a i M-M



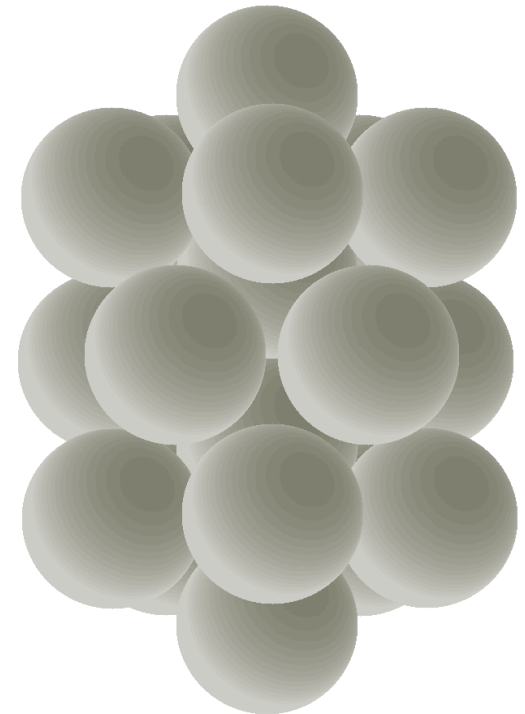
N=4, czworościan



N=6, ośmiościan

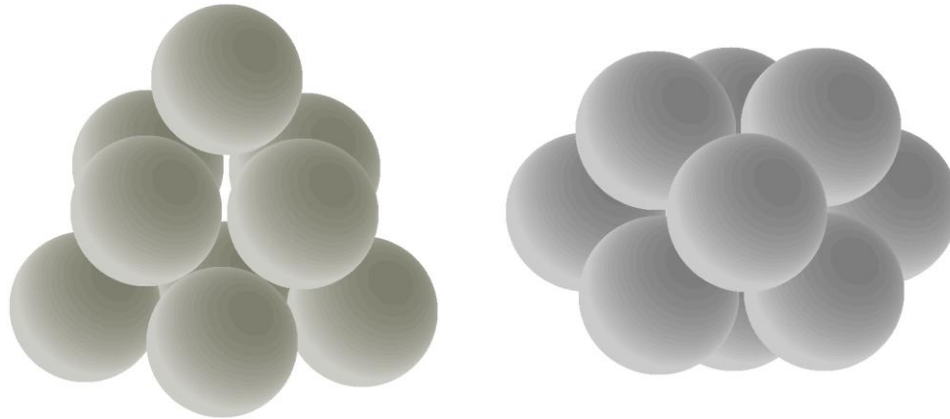


N=13, osiemnastościan



N=19, podwójny osiemnastościan

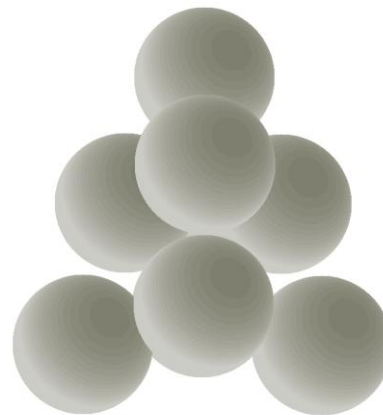
Minima globalne oraz lokalne (isomery) na przykładzie N=9



Klaster Morse'a - min. lokalne $E_b=0.748161\text{eV}$ (isomer), będące jednocześnie minimum globalnym dla klastra Murrella-Mortramma $E_b=1.764\text{eV}$

Morse – min. glob $E_b=0.75344\text{eV}$;

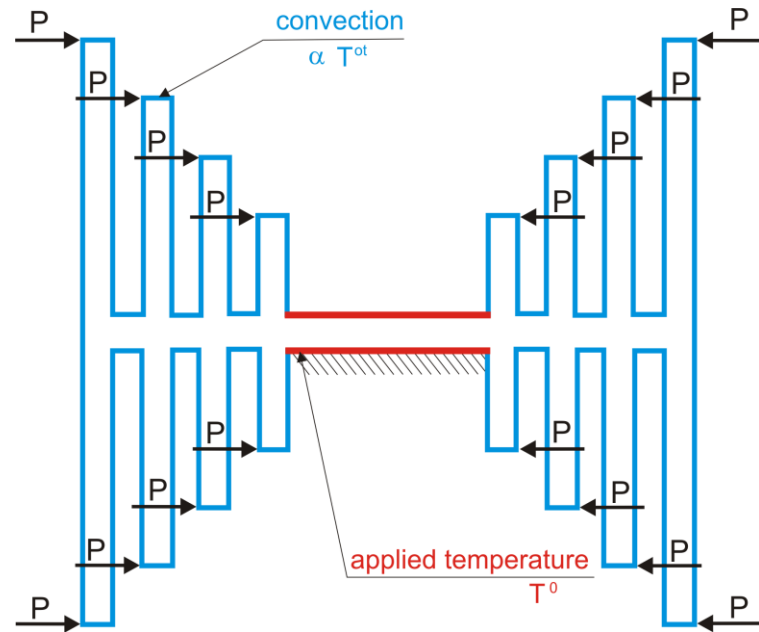
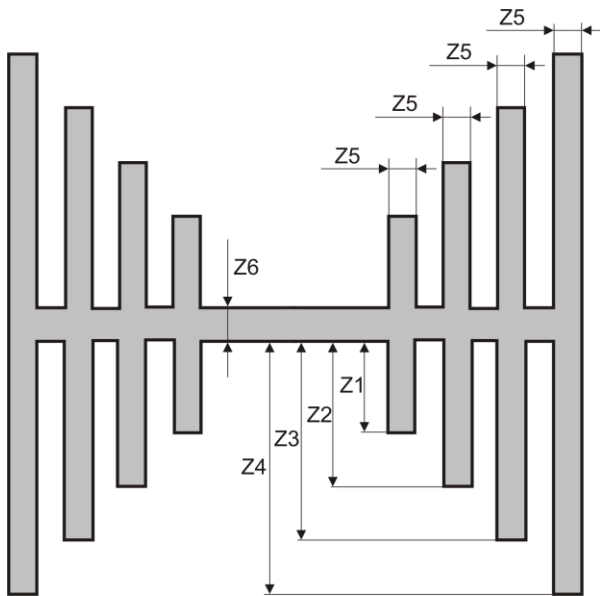
Morse – min. lok. $E_b=0.72831\text{eV}$



Kierunki rozwoju (2)

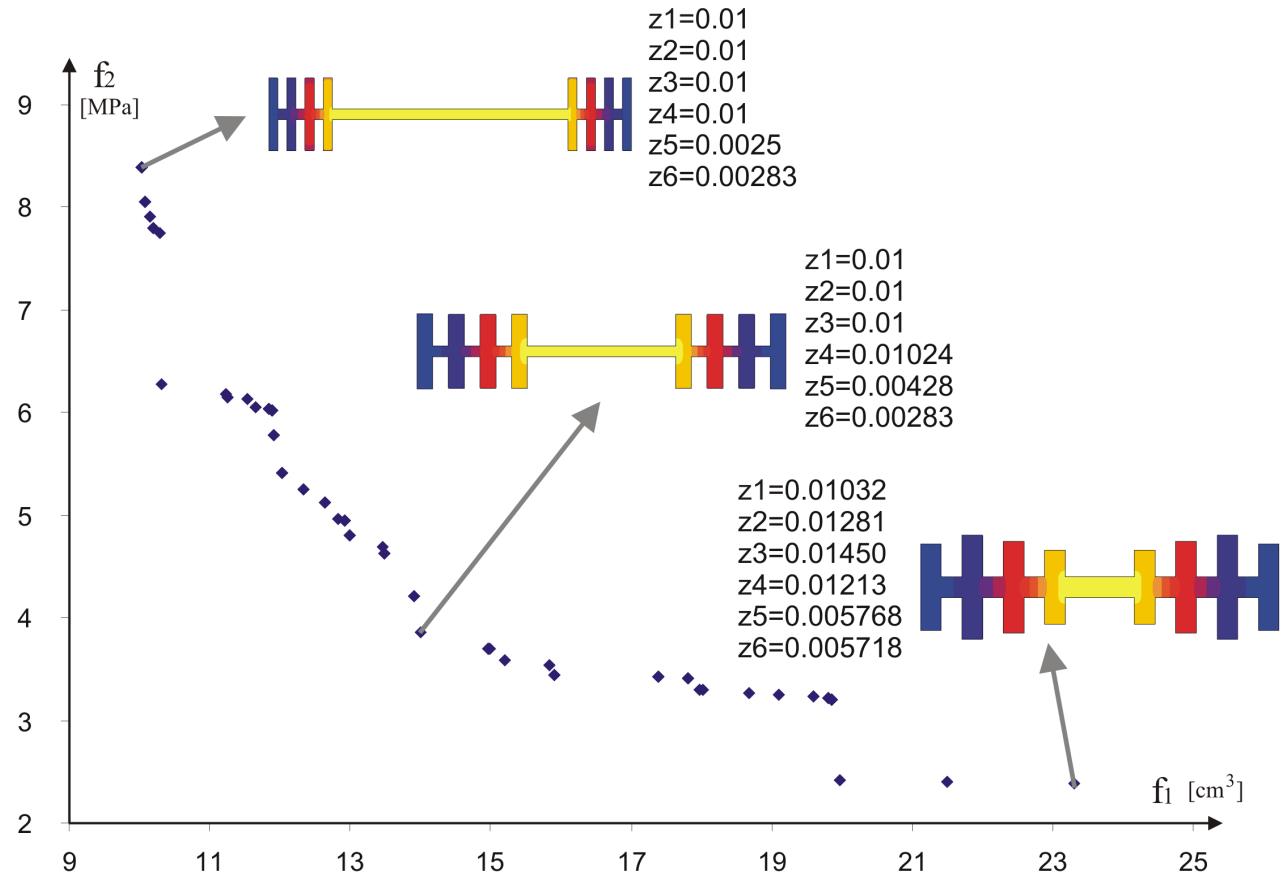
**Optymalizacja (wielokryterialna)
w zagadnieniach pól sprzężonych**

Example



Design variable	Min value [m]	Max value [m]
Z_1, Z_2, Z_3, Z_4	0.01	0.05
Z_5	0.0025	0.006
Z_6	0.0025	0.008

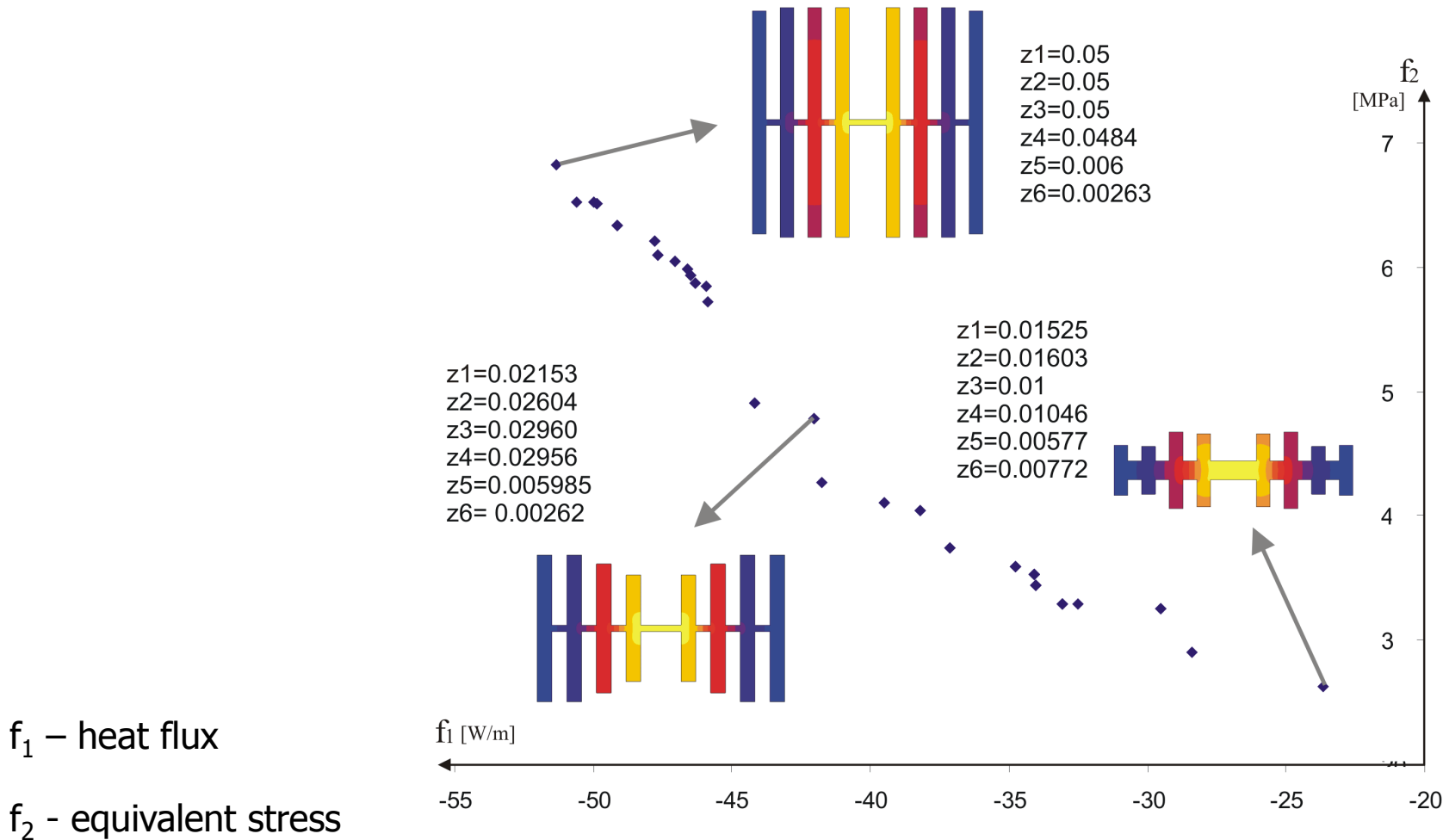
Results of the optimization (Pareto approach)



f_1 - volume

f_2 - equivalent stress

Results of the optimization (Pareto approach)

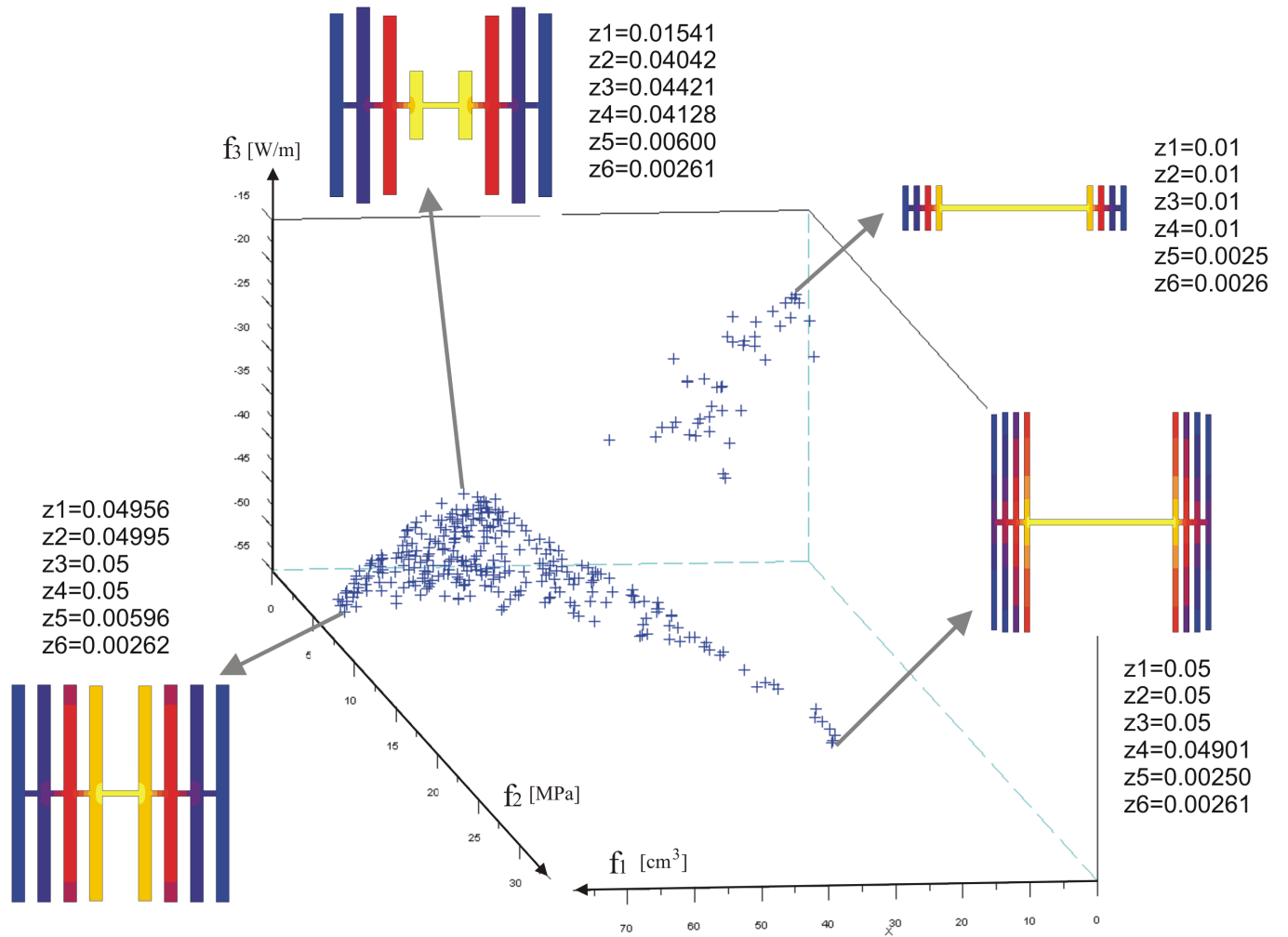


Results of the optimization (Pareto approach)

f_1 – volume

f_2 - equivalent stress

f_3 – heat flux



Kierunki rozwoju (3)

Optymalizacja i identyfikacja w warunkach niepewności

Kierunki rozwoju (4)

Rozwój metod optymalizacji topologicznej

**Rozwój nowych metod optymalizacji
wielokryterialnej**

(np. AE i SSI sprzężone z teorią gier)

Sterowanie

Sterowanie optymalne (1)

- Układ sterowany opisany równaniem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

gdzie

\mathbf{u} – wektor sterujący

Ograniczenia: $\mathbf{g}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$

Rodzaje sterowania optymalnego:

- A. Sterowanie minimalno-czasowe
- B. Sterowanie docelowe
- C. Sterowanie minimalno-całkowe

Sterowanie optymalne (2)

- Przedstawione zagadnienia sterowania optymalnego rozpatrywać można jako szczególny przypadek ogólnego problemu minimalizacji lub maksymalizacji funkcjonału Pontriagina

$$P = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}(t_k)$$

Funkcja Hamiltona: $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{f}$

gdzie: \mathbf{p} – wektor sprzężony

Zasada maksimum Pontriagina:

Jeśli wektor sterujący \mathbf{u} jest optymalny, to

- gdy minimalizuje P , wtedy hamiltonian $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$ osiąga maksimum,
 - gdy maksymalizuje P , wtedy hamiltonian $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u})$ osiąga minimum,
- względem \mathbf{u} w każdej chwili przedziału sterowania.

Sterowanie optymalne (3)

Metoda programowania dynamicznego badania procesów optymalnych na bazie metod mechaniki

- **Zasada optymalności Bellmana:**

Optymalna strategia sterowania ma tę własność, że jakiegokolwiek byłby stan początkowy i decyzja początkowa, pozostałe decyzje muszą tworzyć strategię optymalną względem stanu powstałego w wyniku pierwszej decyzji.

- Sterowanie układami holonomicznymi i nieholonomicznymi
- Układy mechaniczne celowego działania
- Sterowanie więzami ciała odkształcalnego

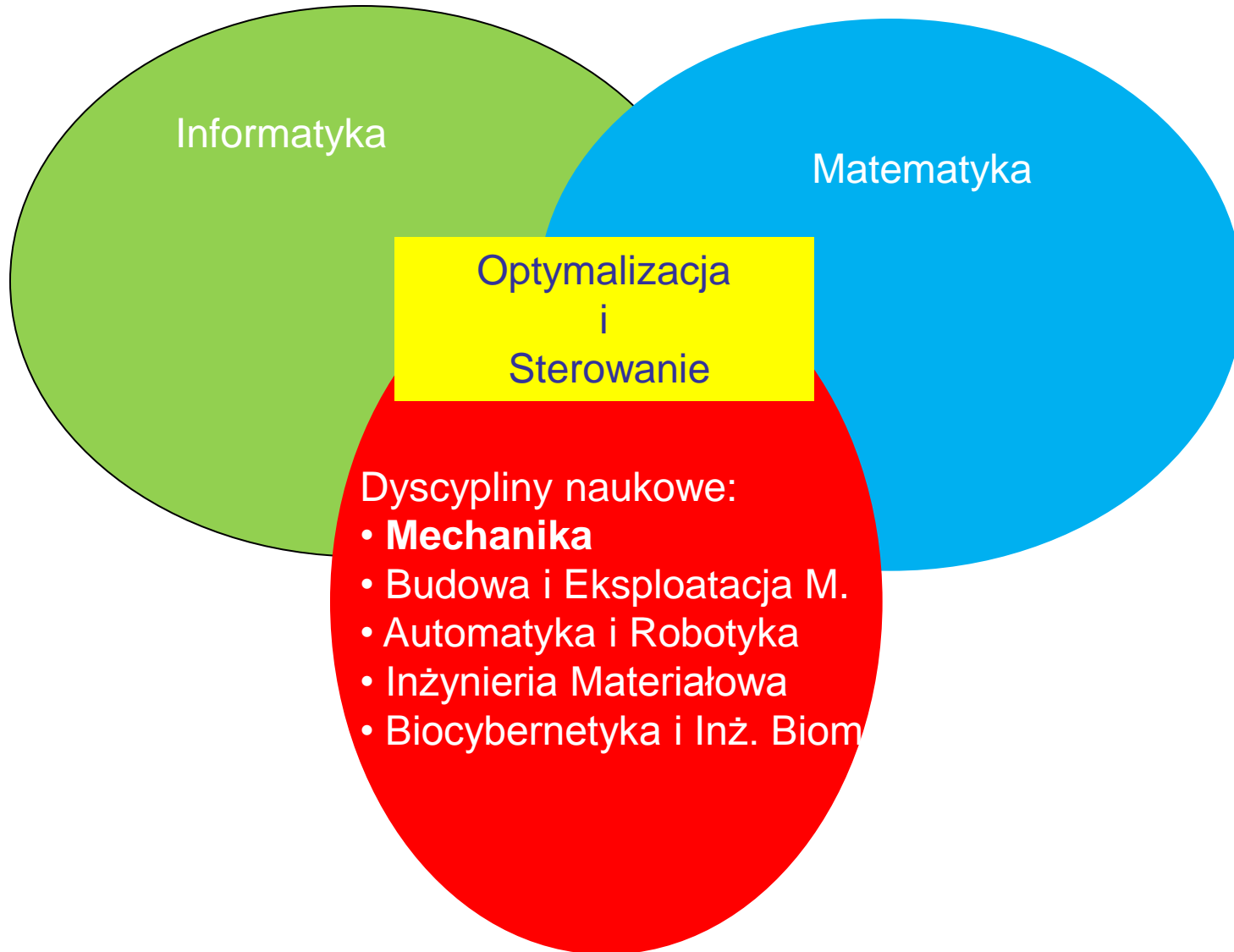
Sterowanie optymalne (4)

- **Projektowanie strategii i algorytmów sterowania nieliniowego układami mechatronicznymi**
- **Prace nad MEMS – metody projektowania sterowania dla mikro-elektromechanicznych sensorów**
- **Zastosowanie „smart materials” w mechatronicznych układach sterowania**
- **Zastosowanie modeli sztywno/ odkształcalnych do sterowania układami odkształcalnymi i sterowanie drganiami.**

Sterowanie optymalne (5)

- **Sterowanie modelami humanoidów, modelami ciała ludzkiego**
- **Giroskopy MEMS szeroko rozpowszechnione w przemyśle samochodowym, kamerach cyfrowych, układach nawigacyjnych**

Interdyscyplinarny charakter Sekcji



**RHex – robot - superman, biegający, pływający, grający w piłkę
kwintesencja modelowania i technik sterowania optymalnego
oraz możliwości konstrukcyjnych**

<http://www.grasp.upenn.edu/research/highlights>

The logo for RHex, consisting of the text "RHex" in a white, sans-serif font, centered on a solid black rectangular background.

RHex